In Bazzini, L. (Ed.), *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra, VI, (SFIDA 21–25)* (pp. 53–64). Torino: Dipartimento di Matematica, Università di Torino (2008)

Equazioni e disequazioni dalla storia alla didattica della matematica

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"

Summary

In this paper the historical development of equations and inequalities is examined, in order to underline their different roles in various socio-cultural contexts. From the educational point of view, those historical differences must be taken into account: a forced analogy between equations and inequalities, in procedural sense, would cause dangerous phenomena.

I. Introduzione

L'introduzione delle equazioni e delle disequazione avviene spesso, nella pratica scolastica, secondo una presentazione sequenziale. Ma, a dispetto dell'evidente parallelismo delle procedure risolutive, accade spesso che le tecniche messe a punto per la risoluzione di equazioni causino, se applicate acriticamente alle disequazioni, alcuni gravi errori (si veda ad esempio: Linchevski & Sfard, 1991 e 1992; Fischbein & Barash, 1993; Tsamir, Tirosh & Almog, 1998). Gli studi sperimentali di L. Bazzini e P. Tsamir (2001 e 2002, in cui viene confrontato il comportamento di allievi della scuola secondaria in Italia ed in Israele) hanno messo in luce molte situazioni interessanti e significative.

Premettiamo un'osservazione terminologica: dal punto di vista logico l'uguaglianza "2+7 = 9", spesso detta *identità*, esprime una proposizione con valore di verità "vero"; invece l'*equazione* "x+2 = 5" non esprime una proposizione, ma "una condizione riguardante i valori che possono essere assegnati alla variabile x" (Bell & Machover, 1977, p. 12) e che assumerà un valore di verità, "vero" o "falso", a seconda di quale numerò sarà assegnato a x.

Un'analoga distinzione può essere introdotta tra la *disuguaglianza* "1+7 < 9" (vera) e la *disequazione* "x+2 < 5" (vera se e solo se x < 3). Si noti che nella lingua inglese il solo termine *inequality* è usato per indicare disuguaglianze e disequazioni, mentre in altre lingue la citata distinzione viene mantenuta mediante l'uso di termini specifici (ad esempio in francese tali parole sono *inégalité* e *inéquation*).

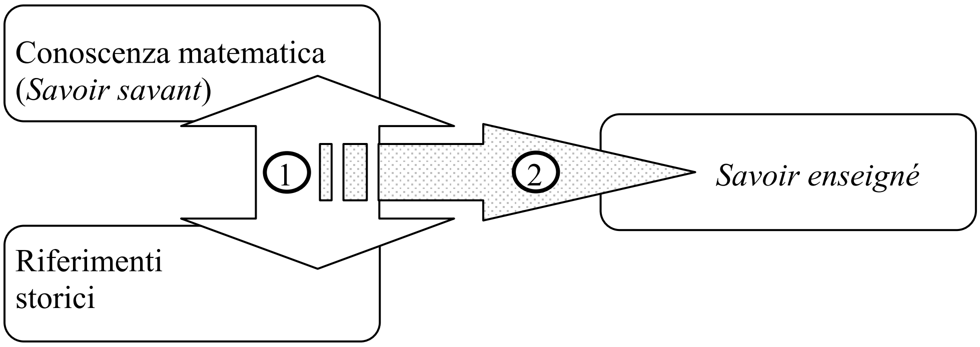
La distinzione tra disuguaglianze e disequazioni sarà utile, nel presente lavoro, per valutare la rilevanza didattica di alcuni riferimenti storici.

II. Storia e didattica: diversi approcci teorici

Il nostro lavoro terrà conto di alcuni riferimenti tratti dalla storia dell'Algebra: molti studi, anche recenti, hanno infatti sottolineato l'importanza che l'approccio storico può avere nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica, con riferimento ad ogni livello scolastico (Heiede, 1996). R.L. Hayes ha affermato: "Credo che sia un grave errore, ed una strategia sbagliata, cercare di insegnare la matematica senza un riferimento alle sue componenti culturali, sociali, filosofiche e storiche” (Hayes, 1991. Nel presente lavoro tutte le traduzioni sono nostre).

L’uso della storia nella didattica college i processi psicologici di apprendimento con le questioni storiche ed epistemologiche (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 162) e tale collegamento viene assicurato dall’epistemologia (Moreno & Waldegg, 1993; Bagni, 2004). Naturalmente, per quanto riguarda le modalità di applicazione della storia alla didattica, le possibilità sono numerose, sia dal punto di vista teorico che operativo: ad esempio, un primo livello si collega alla presentazione di aneddoti (e, sebbene esso sia considerato piuttosto superficiale, può essere utile per suscitare o per rinforzare la motivazione degli allievi: Radford, 1997); livelli superiori coinvolgono possibilità metacognitive o multidsciplinari.

Faremo comunque riferimento alla rappresentazione seguente:



(dove sono impiegati alcuni diffuse termini di Y. Chevallard). Naturalmente si tratta di uno schema notevolmente semplificato: ad esempio, il passaggio dal *savoir savant* al *savoir enseigné* richiederebbe una trattazione assai approfondita. Possiamo tuttavia già affermare che possono essere analizzati due gruppi di collegamenti:

- le connessioni (1) tra la conoscenza matematica ed i riferimenti storici;
- le connessioni (2) tra il gruppo conoscenza matematica-riferimenti storici e la conoscenza presentata agli allievi in classe (dunque dopo la *transposition didactique*).

Sottolineiamo che questa prima presentazione di tali connessioni non sottende alcun loro ordinamento gerarchico né alcuna priorità cronologica.

I vari usi della storia nella didattica non riflettono solamente scelte didattiche diverse, ma implicano importanti assunzioni epistemologiche (Radford, 1997 e 2003). Ad esempio, la stessa selezione dei dati storici da presentare in classe è epistemologicamente importante e riflette dunque le scelte dell’insegnante. I principali problemi sono inoltre collegati all’interpretazione dei dati, che viene sempre a basarsi sulle nostre attuali concezioni culturali (Gadamer, 1975; Bagni, in stampa).

Spesso il ruolo della storia nella didattica è considerato in termini introduttivi: la trattazione di un argomento viene dunque preceduta dall’ordinata presentazione dei riferimenti storici disponibili. Ma talvolta viene implicitamente o esplicitamente affermato un parallelismo tra lo sviluppo storico e la crescita cognitiva (a partire dalle considerazioni espresse da E. Haeckel nel 1874, per giungere alla celebre tesi in: Piaget & Garcia, 1989). Un nuovo concetto, infatti, potrebbe essere “incontrato” dai matematici nelle fasi operative di ricerca per essere quindi inquadrato teoricamente anni o secoli più tardi, anche alla luce dei mutati standard di rigore (Furinghetti & Radford, 2002); un’evoluzione parallela potrebbe essere evidenziata in ambito didattico: spesso il primo contatto con una nuova nozione avviene in situazioni pratiche (Sfard, 1991; si veda la profonda analisi critica riportata in: Radford, 1997): sottolineiamo inoltre che in effetti le reazioni degli allievi sono talvolta sorprendentemente simili a quelle dei matematici che hanno operato nella storia della nostra disciplina (Tall & Vinner, 1981) e tale corrispondenza può costituire un'indicazione significativa ed utile per gli insegnanti.

Tuttavia l'analogia precedentemente delineata non può essere considerata senza un adeguato inquadramento teorico: essa potrebbe infatti portare a delicate questioni epistemologiche. Un problema di primaria importanza è il seguente, collegato all'interpretazione della storia: è corretto presentare la storia come un percorso che, attraverso inevitabili errori ed opportuni ripensamenti, porti finalmente all'elaborazione delle nostre teorie moderne? Quale ruolo, in tale evoluzione, deve essere riconosciuto all'azione dei fattori sociali e culturali che hanno influenzato i singoli periodi storici considerati? I contenuti matematici sono influenzati anche da elementi non matematici, e l'evoluzione della conoscenza scientifica non può non tener conto, in generale, delle istituzioni culturali (Bagni, in stampa).

Secondo l'approccio basato sugli "ostacoli epistemologici" di G. Brousseau, uno dei più importanti scopi della ricerca storica è la ricerca delle *situations fondamentales*, nodi particolarmente significativi, sistemi di vincoli e di problemi che hanno portato alla progressiva crescita del sapere matematico, da analizzare per comprendere la (esistente) conoscenza (Brousseau, 1983; Radford, Boero & Vasco 2000, p. 163). Gli ostacoli sono suddivisi in epistemologici, ontogenetici, didattici e culturali (Brousseau, 1989) e tale suddivisione sottolinea che la sfera della conoscenza viene considerata isolatamente rispetto alle altre sfere. Tale approccio è caratterizzato da importanti assunzioni epistemologiche (Radford, 1997): la ricomparsa, nei processi attuali di insegnamento-apprendimento, degli stessi ostacoli che sono stati incontrati dai matematici nella storia; inoltre l'approccio esclusivo, isolato dell'allievo al sapere, senza interazioni sociali con gli altri allievi e con l'insegnante. Dunque, con riferimento allo schema presentato precedentemente, possiamo sottolineare tali assunzioni nel modo seguente:

(1) la conoscenza (matematica) esiste e rappresenta la migliore soluzione per alcuni problemi particolarmente significativi; gli ostacoli epistemologici si presentano sia nella storia che nella pratica didattica;

(2) la sfera della conoscenza è separata dalle sfere didattiche e culturali; gli allievi si accostano alla conoscenza individualmente.

Il punto cruciale è il seguente (Gadamer, 1975): è possibile, oggi, interpretare un evento storico senza essere influenzati dalle concezioni moderne? È dunque necessario accettare la presenza del nostro attuale punto di vista e tener presente che la considerazione di elementi storici richiede di porre a contatto due culture che sono "diverse [ma] non incommensurabili" (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 165). Per quanto riguarda la natura della matematica, l'approccio storico ci spinge a "considerare la matematica non come un prodotto statico, dotato di un esistenza *a priori*, ma come un processo intellettuale; non come una struttura completa dissociata dal mondo, bensì come un'attività in divenire degli individui" (Grugnetti & Rogers, 2000, p. 45; si veda inoltre l'approccio "voci ed echi": Boero & Al. 1997).

Secondo l'approccio socio-culturale di L. Radford, la conoscenza è legata alle attività degli individui e, come sopra osservato, ciò si collega strettamente alle istituzioni culturali; la conoscenza non viene costruita individualmente, ma in un contesto sociale (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 164). Il ruolo della storia deve essere interpretato con riferimento alle diverse situazioni socio-culturali (Radford, 1997 e 2003) e fornisce l'opportunità per uno studio critico dei diversi periodi storici considerati. Riferendoci ancora allo schema sopra presentato possiamo così riassumere le assunzioni epistemologiche:

(1) la conoscenza si college alle azioni richieste per la risoluzione di un problema; i problemi si risolvono all'interno dei vari contesti socio-culturali;

(2) la conoscenza è costruita socialmente; le istituzioni culturali della propria cultura influenzano gli allievi.

Osserviamo infine che gli approcci di Brousseau e di Radford non devono essere considerati necessariamente in contraddizione: il primo era stato presentato, a partire dagli anni Settanta, con intento classificatorio, mentre il secondo si basa su di una prospettiva sociologica (una dettagliata discussione del loro confronto è in: Bagni & D'Amore, in stampa).

III. La selezione dei dati storici: storia della notazione algebrica

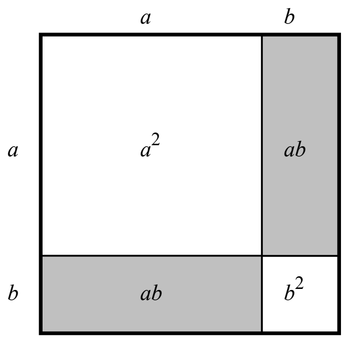
Abbiamo precedentemente affermato che quando un concetto viene introdotto storicamente la selezione dei dati disponibili è epistemologicamente rilevante (per quanto riguarda l'influenza dei commentatori e dei curatori delle varie edizioni opere considerate si veda: Barbin, 1994). Citiamo nuovamente L. Radford il quale osserva: "I dati storici saranno sempre interessanti con riferimento al quadro concettuale del programma di ricerca" (Radford, 1997, p. 28; sei vedano inoltre i classici esempi analizzati in: Radford, 1996). Presenteremo a tale riguardo un esempio significativo.

Nel 1842, G.H.F. Nesselmann individuò tre fasi principali nello sviluppo storico della notazione algebrica (si veda inoltre: Serfati, 1997):

Algebra retorica	***(dalle) parole***
(Egiziani, Babilonesi etc.)	
Algebra sincopata	⇩
(Pacioli, Cardano etc.)	
Algebra simbolica	
(Viète etc.)	***(ai) simboli***

Questa sequenza può suggerire la progressiva eliminazione delle espressioni verbali non-matematiche: dunque gli oggetti matematici verrebbero ad essere "purificati sottraendo, da essi, la dannosa sostanza fisica" (Radford, 1997, p. 28); ciò può suggerire l'esistenza di un linguaggio algebrico definitivo, assoluto, e la concezione dell'intero sviluppo storico come il progressivo avvicinamento alla nostra moderna, pura espressione. Ma questo tradizionale riassunto può essere considerato completo ed affidabile? Si noti che in esso non compaiono alcuni momenti molto importanti della storia dell'Algebra: dobbiamo ad esempio ricordare l'Algebra Geometrica greca (la denominazione risale a H.G. Zeuthen ed è riferita al II libro degli *Elementi* euclidei) ed il simbolismo introdottola Diofanto di Alessandria (III-IV secolo).

Le radici dell'Algebra Geometrica risalgono ad Eudosso di Cnido (408-355 a.C.) il quale riferì la nozione di grandezza ad entità come segmenti, aree e volumi (Kline, 1972, p. 48). A tali grandezze non venivano assegnati valori numerici e ciò consentì la formulazione di risultati generali: la figura seguente si riferisce alla Proposizione 4 del II libro degli *Elementi*.



Oggi tale proposizione è espressa simbolicamente nella forma: $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$; ma negli *Elementi* la figura riassume e dimostra quanto affermato.

Sei secoli più tardi, Diofanto introdusse un simbolismo algebrico, e ciò deve essere considerato "uno dei massimi risultati di Diofanto" (Kline, 1972, p. 139; sebbene alcuni simboli diofantei fossero apparsi in una collezione di problemi probabilmente precedente l'*Arithmetica*, come osservato in: Boyer, 1985, p. 204). Questo simbolismo è piuttosto complicato e non è completo (la principale differenza fra il simbolismo diofanteo e la nostra moderna notazione algebrica è la mancanza di simboli per operazioni e relazioni: Boyer, 1985, p. 202); l'Algebra diofantea è stata chiamata *sincopata* (Boyer, 1985, p. 201; Kline, 1972, p. 140), ma se confrontiamo la scrittura di Diofanto con quella, ad esempio, di Cardano ci rendiamo conto della loro notevole differenza: Diofanto ottenne dei risultati fondamentali (l'Algebra greca "non fu più confinata entro le prime tre potenze o le prime tre dimensioni": Boyer, 1985, p. 202), mentre l'Algebra sincopata sviluppatasi in Europa tra il XV e il XVI secolo sembra essere "un puro accorgimento tecnico che le limitazioni di scrittura e la mancanza di possibilità di stampa avevano imposto" (Radford, 1997, p. 29).

Se dunque riscriviamo il precedente sommario tenendo conto della presenza dei nuovi elementi otteniamo:

Algebra retorica (Egiziani, Babilonesi etc.)	***Parole***
"Algebra geometrica" greca	***Figure***
Diofanto di Alessandria	*Simbolismo incompleto (?)*
Algebra sincopata (Pacioli, Cardano etc.)	*Parole abbreviate (?)*
Algebra simbolica (Viète etc.)	***Simboli***

Come dunque possiamo descrivere la storia dell'Algebra soltanto nei termini tradizionali del progressivo passaggio dalla parola al più raffinato simbolo se consideriamo la presenza dell'Algebra geometrica e del simbolismo diofanteo? Pur senza escludere la validità di alcune idee base della tradizionale scansione di Nesselmann, riteniamo che una più approfondita analisi possa rivelarsi illuminante.

IV. Storia dell'algebra: le equazioni e le disequazioni

La trattazione precedente sottolinea che i procedimenti algebrici non sono stati espressi mediante simboli per molto tempo, sebbene l'evoluzione della notazione algebrica non possa essere ridotta alla progressiva eliminazione della "dannosa sostanza fisica" (Radford, 1997, p. 28). In generale, l'evoluzione storica è assai complessa: ad esempio, G. Lakoff e R. Núñez notano: "È difficile da credere, ma per due millenni, fino al XVI secolo, i matematici non hanno usato un simbolo per l'uguaglianza" (Lakoff & Núñez, 2000, p. 376). Naturalmente il ruolo di "=" non può essere considerato in termini troppo semplici: "Anche un'idea così apparentemente semplice come l'uguaglianza coinvolge una grande complessità cognitiva. [...] La comprensione del significato di '=' ha richiesto l'analisi cognitiva delle idee matematiche coinvolte" (Lakoff & Núñez, 2000, p. 377; Arzarello, 2000). Nel primo paragrafo abbiamo notato alcune differenze tra le identità e le equazioni, e altri importanti elementi riguardanti l'uso di "=" possono essere rilevati (Lakoff & Núñez, 2000, p. 376).

Tratteggiamo ora brevemente alcuni riferimenti storici riguardanti equazioni e disequazioni. La storia delle equazioni è assai ricca e in molte culture, in diverse parti del mondo, troviamo procedimenti che possono essere messi in relazione con equazioni; nel Rinascimento, la *Regola d'Algebra* (Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 7) era il procedimento per la risoluzione di problemi aritmetici che si concludeva con la risoluzione di un'equazione algebrica.

La storia delle disequazioni, tuttavia, non appare altrettanto ricca: anticamente anche questi procedimenti erano espressi verbalmente (indichiamo ad esempio le disuguaglianze sugli elementi di un triangolo presenti negli *Elementi* euclidei: N. Tartaglia, *Euclide Megarense*, Bariletto, Venezia 1569, p. 27, riferita alla proposizione 21 del I libro), ma essi si riferiscono a *disuguaglianze*, non propriamente a *disequazioni*.

Alcune *disequazioni* (in senso proprio) possono essere collegate allo sviluppo delle tecniche dell'Analisi matematica, ad esempio a minorazioni e maggiorazioni (Hairer & Wanner, 1996; non possiamo dimenticare la famosa affermazione di J. Dieudonné nella *Prefazione* di *Calcul infinitesimal*, Hermann, Paris 1980: "En d'autres termes, le Calcul infinitésimal, tel qu'il se présente dans ce livre est l'apprentissage de maniement des *inégalités* bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots: *majorer, minorer, approcher*"). Ma ci riferiremo ora ad alcuni testi pubblicati nel XIX secolo da P. Ruffini (1765-1822), inclusi nei tomi III e V di *Corso di Matematiche* (Modena, 1806 e 1808).

Proponiamo alcuni esempi tratti da tali lavori:

- nel III tomo (*Algebra*), p. 24, viene affermata esplicitamente una proprietà di equivalenza per le equazioni, dicendo: "A–B–C = –D+E, trasporto i termini del primo membro nel secondo, e quei del secondo nel primo, si otterrà D–E = –A+B+C". Ma nell'opera non sono trattati casi analoghi per le disequazioni;
- nel III tomo, p. 146, sono impostate e risolte alcune disequazioni (anche abbinate in forma di sistema) per esprimere delle condizioni che devono essere rispettate dalle soluzioni di un problema risolto mediante un sistema di equazioni lineari. Spesso gli esempi proposti prevedono e trattano condizioni di questo genere: dunque le disequazioni sono sempre "abbinate" alle equazioni per esprimere condizioni sulle radici (anche nel V tomo, *Appendice all'Algebra*).

Un esempio interessante può essere inoltre riferito alla Matematica del XX secolo. Scrive P. Odifreddi: "Un contributo di von Neumann fu la soluzione nel 1937 di un problema risalente a L. Walras nel 1874: l'esistenza di situazioni di equilibrio nei modelli matematici dello sviluppo del mercato, basati sulla domanda e sull'offerta (attraverso prezzi e costi). Egli vide anzitutto che un modello andava espresso mediante disequazioni (come si fa oggi) e non equazioni (come si era fatto fino ad allora)" (dal sito: www.matematicamente.it/articoli).

Possiamo dunque rilevare la presenza di una significativa asimmetria storica: in generale, i matematici esprimevano mediante equazioni il problema da risolvere (citiamo ancora: Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 7); quindi, mediante disequazioni, fissavano le condizioni per le soluzioni di tali equazioni. Inoltre, nella storia (e nella pratica didattica), la risoluzione di una disequazione era spesso ricondotta alla risoluzione dell'equazione ad essa associata. È però necessario considerare il contesto sociale e culturale: la "soluzione concreta" è stata spesso considerata molto più importante di un astratto "campo di possibilità". Una significativa "importanza sociale" è stata spesso chiaramente attribuita al ricavo della soluzione, come è testimoniato dall'elaborazione e dell'uso di metodi pratici, approssimati (ci riferiamo dunque a Radford, 1997; si veda inoltre: Hairer & Wanner, 1996).

V. Conclusioni: dalla storia alla didattica

Sebbene recentemente un ruolo autonomo delle disequazioni sia stato riconosciuto in ambito didattico, una qualche "subordinazione operativa" è ancora rilevabile. Una disequazione individua un sottoinsieme della retta reale, spesso un sottoinsieme infinito (non numerabile) come un segmento o una semiretta. Le caratteristiche peculiari di tale sottoinsieme sembrano talvolta identificate nei "punti di frontiera" (ad esempio, gli estremi del segmento), il cui ricavo si riconduce alla risoluzione dell'equazione associata alla disequazione data.

Alcune importanti metafore (collegate all'Aritmetica) sono basate sulla considerazione di "segmenti fisici": ad esempio, un numero può essere fatto corrispondere ad una "distanza misurabile collocando segmenti fisici di lunghezza unitaria uno dopo l'altro e quindi contandoli" (Lakoff & Núñez, 2000, p. 68). Inoltre: "Quando ci muoviamo in linea retta da un punto ad un altro, il percorso forma un segmento fisico [...]. C'è una semplice relazione tra un tale moto e un segmento fisico: l'origine del moto corrisponde ad un estremo del segmento, il termine all'altro estremo" (Lakoff & Núñez, 2000, pp. 71-72). Dunque anche nel quadro teorico dell'*embodied cognition* la descrizione fisica di un segmento (o di una semiretta) "inizia" da un estremo e "termina" all'altro estremo (o prosegue indefinitamente).

Spesso la prima fase (ed in molti casi la fase principale) della risoluzione di una disequazione si reduce alla risoluzione dell'equazione ad essa associata: ciò induce a considerare un'analogia didattica che si sovrappone alla citata asimmetria storica e che può rivelarsi, se non adeguatamente controllata, certamente rischiosa. Per evitare pericolosi scollamenti tra senso e denotazione, Bazzini e Tsamir suggeriscono "un approccio funzionale: non equazioni e disequazioni in sequenza, ma una trattazione integrata basata sul concetto di funzione" (Bazzini & Tsamir, 2002).

La forzata analogia tra equazioni e disequazioni, già implicita nella presentazione sequenziale di equazioni e disequazioni, risente inoltre dei registri impiegati. I registri simbolici non possono non indurre considerazioni di analogia tra $f(x) = g(x)$ e $f(x) < g(x)$. Utile potrebbe dunque essere il ricorso a registri rappresentativi non simbolici (ad esempio visuale, implicato nella proposta funzionale di Bazzini e Tsamir), che devono comunque risultare coordinati con quello simbolico (Duval, 1995; si ripropone comunque la necessità di un'attenta negoziazione del significato delle espressioni simboliche: Malara & Iaderosa, 2000). Ulteriori ricerche potranno essere dedicate all'approfondimento delle segnalate questioni.

VI. Riferimenti bibliografici

Arzarello, F.: 2000, Inside and outside: space, time and language in proof production, *PME-24*, 1, 23-38.

Bagni, G.T.: 2004, Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche, *La matematica e la sua didattica*, 3, 51-70.

Bagni, G.T.: in stampa, Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.

Bagni, G.T. & D'Amore, B.: in stampa, *Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale*.

Barbin, E.: 1994, Sur la conception des savoirs géométriques dans les Éléments de géométrie, Gagatsis, A. (Ed.), Histoire et enseignement des Mathématiques: *Cahiers de didactique des Mathématiques*, 14-15, 135-158.

Bazzini, L. & Tsamir, P.: 2001, Research-based instruction: widening students' perspective when dealing with inequalities, *ICMI-Study 12*, 1, 61-68.

Bazzini, L. & Tsamir, P.: 2002, Algorithmic models: Italian and Israeli students' solutions to algebraic inequalities, *PME-26*, 4, 289-296.

Bell, J. & Machover, M.: 1977, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.

Boero, P.; Pedemonte, B. & Robotti, E.: 1997, Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective, *PME-21*, 2, 81-88.

Boyer, C.B.: 1985, *A History of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1st ed.: John Wiley & Sons, 1968).

Brousseau, G.: 1983, Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, 165-198.

Brousseau, G.: 1989, Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, Bednarz, N. & Garnier, C. (Eds.), *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*, Agence d'Arc, Montreal, 41-64.

Duval, R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Paris.

Fischbein, E. & Barash, A.: 1993, Algorithmic models and their misuse in solving algebraic problems, *PME-17*, 1, 162-172.

Franci, R. & Toti Rigatelli, L.: 1979, *Teoria e storia delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano.

Furinghetti, F. & Radford, L.: 2002, Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice, English, L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Erlbaum, Hillsdale, 631-654.

Gadamer, H.-G.: 1975, *Truth and Method*, Crossroad, New York (2a ed.: 1989).

Grugnetti, L. & Rogers, L.: 2000, Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues, Fauvel, J., v. Maanen, J. (Eds), *History in Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht, 39-62.

Hairer, E. & Wanner, G.: 1996, *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, New York.

Heiede, T.: 1996, History of Mathematics and the Teacher, Calinger, R. (Ed.), *Vita Mathematica*, The Mathematical Association of America, 231-243.

Hayes, R.L.: 1991, History, a way back to mathematics, *History and Pedagogy of Mathematics Newsletter*, 22, 10-12.

Kline, M.: 1972, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York.

Lakoff, G. & Nuñez, R.: 2000, *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Linchevski, L. & Sfard, A.: 1991, Rules without reasons as processes without objects, the case of equations and inequalities, *PME-15*, 2, 317-324.

Linchevski, L. & Sfard, A.: 1992, Equations and inequalities. Processes without objects?, *PME-16*, 3, 136.

Malara N.A & Iaderosa R.: 2000, The Interweaving of Arithmetic and Algebra: Some Questions About Syntactic, Relational and Structural Aspects and their Teaching and Learning, Swanke E. (Ed.), *European Research in Mathematics Education,* 2, 159-171.

Moreno, L. & Waldegg, G.: 1993, Constructivism and mathematical education, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 24, 5, 653-661.

Nesselmann, G.H.F.: 1842, *Versuch einer kritischen Geschichte den Algebra, Nach den Quellen bearbeitet*, Reimer, Berlin.

Piaget, J. & Garcia, R.: 1989, *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York.

Radford, L.: 1996, An Historical Incursion into the Hidden Side of the Early Development of Equations, Giménez, J., Campos Lins, R. & Gómez, B. (Eds.), *Arithmetic and Algebra Education*, Univ. Rovira I Virgili, Tarragona, 120-131.

Radford, L.: 1997, On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.

Radford, L.: 2003, On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, Legas, Ottawa, 49-79.

Radford, L., Boero, P. & Vasco, C.: 2000, Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht, 162-67.

Serfati, M.: 1997, *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 1.

Sfard, A.: 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Tall, D. & Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-69.

Tsamir, P., Tirosh, D. & Almog, N.: 1998, Students' solutions of inequalities, *PME-22*, 129-136.