Συλλογισμός
Syllogismos
History and Epistemology for Mathematics Education
Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Appunti di didattica della matematica
(a cura di G.T. Bagni)

Capitolo 1

La didattica della matematica

1.1. DIDATTICA GENERALE E DIDATTICA DISCIPLINARE

1.1.1. Che cosa significa *didattica*?

Il nostro viaggio nella didattica della matematica richiede innanzitutto la precisazione di alcuni concetti generali. Intendiamoci: questo libro non vuole essere un puro e semplice manuale teorico; ma la conoscenza precisa delle nozioni di base e di un’appropriata terminologia è indispensabile per creare un primo terreno d'intesa, per determinare una base culturale comune sulla quale sviluppare le nostre considerazioni[1].

Spesso, ad esempio, riuniamo nel termine *didattica* tutto ciò che riguarda la vita scolastica: le caratteristiche dell'insegnamento, i libri di testo, gli altri sussidi, le reazioni dei nostri allievi, la tecniche di valutazione etc.: tutto sembra far parte della *didattica* (sostantivo); ad ogni scelta che ha a che fare con la scuola, ad ogni attività svolta in ambito scolastico, ad ogni oggetto impiegato a scuola attribuiamo senz'altro l'aggettivo *didattico*. Forse, prima di iniziare un lungo e (a tratti) impegnativo percorso che si snoderà tra l'insegnamento e l'apprendimento, sarà necessario approfondire adeguatamente il significato di questo benedetto termine, *didattica*, così diffuso e dal senso non sempre altrettanto chiaro e delimitato (Pellerey, 1991).

Non daremo, tuttavia, una definizione di didattica. O, meglio, non daremo di tale parola la tradizionale definizione "da vocabolario": ciò perché le accezioni, le sfumature ad essa connesse sono tali e tante che qualsiasi definizione rischierebbe di essere limitativa e, dunque, gravemente scorretta. Illustreremo invece il significato, la portata del termine *didattica* mediante la presentazione di alcune tre le principali questioni ad esso collegate[2].

Affronteremo innanzitutto un importante argomento, che può essere sintetizzato nella domanda seguente: se è vero che il termine *didattica* si riferisce primariamente all'insegnamento, ha senso lo studio e la presentazione di una "didattica in generale", o sarebbe necessario fare esplicito riferimento alla didattica specifica, alla didattica della materia che si insegna? Ci sono, insomma, regole, indicazioni, problemi, soluzioni comuni (valide per l'apprendimento di ogni materia, dunque per ogni insegnante),

---

[1] L'uso della prima persona plurale, in tutte le parti del presente volume, non si riferisce ad un *pluralis maiestatis*, così caro a chi scrive libri "importanti", ma ad un *pluralis auctoris*: ritengo cioè che la grande maggioranza delle considerazioni che esporrò nel testo sia da considerare condivisa (o, almeno, condivisibile), tra l'autore e il lettore. Il viaggio attraverso la didattica della matematica della scuola secondaria superiore che desidero proporre ai miei lettori è, insomma, un viaggio... comune.

[2] Ai lettori più interessati consigliamo di leggere attentamente le pagine 89-99 di *Didattica generale e didattiche disciplinari* di B. D'Amore e di F. Frabboni (1996).

oppure le varie situazioni, le varie discipline necessitano di un approccio particolare (per cui si dovrà parlare di: didattica della matematica, didattica della lingua italiana, didattica delle scienze etc.)?

1.1.2. Didattiche disciplinari

La questione ora segnalata è attualmente molto dibattuta (ci riferiremo spesso, in questo capitolo, a: D'Amore & Frabboni, 1996, pp. 118-124). Addirittura, si vengono a determinare due posizioni radicali, opposte: da un lato si potrebbe infatti sostenere che esiste *soltanto* una didattica generale, la quale si occupa dei meccanismi dell'apprendimento; le didattiche specifiche, le didattiche disciplinari altro non sono che le applicazioni della didattica generale ai singoli casi concreti. Dall'altro lato, si potrebbe sostenere che la didattica generale, in sé, è inconcepibile: si insegna *qualcosa* e dunque la didattica non può che essere la didattica di *qualcosa*. Altrimenti si rischia di condurre ragionamenti talmente privi di un qualsiasi aggancio con il concreto da risultare vuoti e sterili, inutili.

Per quanto riguarda la contrapposizione ora ricordata, concordiamo con B. D'Amore, che scrive:

«Anzitutto, sembrano esserci problemi di linguaggio, quanto meno di terminologia. "Didattica" può essere inteso come "Teoria della didattica" desunta dalla pragmatica osservata e dai risultati ottenuti. "Didattica" può altresì essere inteso in senso più filosofico e teoretico. "Didattica" può essere poi inteso come qualche cosa di molto più specifico. Di fatto, però, è ovvio che dobbiamo accettare l'evidenza: vi sono problematiche per così dire "a monte" delle didattiche specifiche, che non dipendono [in una nota a pié di pagina, l'Autore riporta: «Forse»] dalle singole discipline... Teorizzando (o generalizzando) queste problematiche, si crea una teoria della didattica che non dipende più esplicitamente o direttamente dalle discipline» (D'Amore & Frabboni, 1996, p. 119).

Dunque: esistono le didattiche specifiche (disciplinari) ed esiste la didattica generale. Si tratta di due approcci diversi al problema, o forse di due fasi successive: le azioni, le scelte, le posizioni assunte dall'insegnante, così come l'apprendimento da parte dell'allievo, sono certamente riferite alla disciplina insegnata (ed appresa); pertanto l'attività didattica e la corrispondente ricerca non possono eludere il riferimento alla materia specifica. Tuttavia le singole didattiche specifiche non procedono del tutto separatamente, sulla base di valutazioni, riferimenti e considerazioni completamente indipendenti: esistono questioni che, pur sorgendo da situazioni proprie della singola disciplina, sono generalizzabili e la cui importanza, una volta operata tale generalizzazione, è comune[3].

Ad esempio, nelle nostre spiegazioni di argomenti di matematica utilizziamo spesso delle figure, dei disegni, dei diagrammi; ma anche nelle spiegazioni relative ad argomenti di *altre* materie si ricorre alla visualizzazione. Possiamo dunque affrontare il problema *visualizzazione* sulla base di considerazioni relative alla didattica della matematica[4]; possiamo però anche farlo con riferimento ad altre didattiche disciplinari. Tali approcci, ovviamente, non sono del tutto indipendenti; molte questioni possono essere (e in effetti sono) comuni: qual è, in generale, l'atteggiamento dell'allievo rispetto ai diversi registri rappresentativi (tra i quali la visualizzazione)? Come agevolare il passaggio da un registro all'altro? Perché, talvolta, la visualizzazione viene accettata quasi con entusiasmo mentre in altre occasioni viene addirittura "guardata con sospetto"? A queste domande possiamo rispondere riferendoci esclusivamente alla nostra materia, magari alla nostra esperienza diretta; ma possiamo anche trattare la questione in termini ben più vasti, dunque con riferimento a quelle realtà, a quei meccanismi che regolano l'apprendimento in generale.

---

[3] Si vedano inoltre le considerazioni epistemologiche e le note riguardanti la formazione espresse in: D'Amore & Frabboni, 1996, pp. 120-124.

[4] Torneremo ampiamente a trattare alcune questioni collegate alla visualizzazione nel capitolo 5.

Spesso, quindi, nel corso di questo libro, parleremo di didattica della matematica, facendo riferimento esplicitamente ad una didattica specifica; con ciò però non intenderemo negare la piena validità di considerazioni riferite ad una didattica generale, l'importanza di elaborazioni teoriche comuni alle varie discipline.

1.2. DIDATTICA DELLA MATEMATICA

1.2.1. Divulgazione delle idee

Le considerazioni alle quali sarà dedicata la presente sezione potrebbero essere riferite sia alla didattica generale sia alla didattica della matematica. Come sopra anticipato, considerata l'impostazione di questo libro, verrà spesso privilegiato il riferimento alla didattica specifica.

Che cos'è, dunque, la didattica della matematica? Come possiamo intendere lo studio, la ricerca in didattica della matematica?

Iniziamo a presentare una prima concezione della didattica della matematica, secondo la quale lo scopo centrale dell'azione e della ricerca didattica è il miglioramento dell'insegnamento. La logica sottintesa a tale interpretazione è evidente: *ad un miglioramento del nostro insegnamento farà inevitabilmente riscontro un miglioramento dei risultati che potremo ottenere dai nostri allievi*.

La concezione della didattica della matematica come *divulgazione delle idee* ha portato a risultati importanti (la denominazione è tratta ancora da: D'Amore & Frabboni, 1996; si vedano in particolare le pp. 90-97). Molti ricercatori, seguendo questa impostazione, hanno brillantemente indicato agli insegnanti concrete possibilità di migliorare significativamente l'insegnamento attraverso sussidi innovativi, accorgimenti, attività. La possibilità di presentare la matematica ai nostri allievi anche mediante riferimenti alla storia della nostra disciplina va inquadrata in questo tipo di impostazione della didattica[5].

Nel prossimo paragrafo presenteremo, ad esempio, un argomento classico del programma di matematica della scuola superiore che può essere introdotto con il supporto di alcuni celebri riferimenti storici: le serie numeriche.

1.2.2. Storia e didattica della matematica: un esempio

Una prima introduzione alle serie numeriche deve tenere conto che una somma di infiniti addendi viene intuitivamente recepita, comunque, come una quantità... "infinitamente grande". La storia della matematica può aiutarci ad orientare i nostri allievi; in particolare, possiamo riferirci a Zenone d'Elea (490-430 a.C.), seguace (e forse figlio adottivo) di Parmenide[6].

Il paradosso di Achille e della tartaruga è ben noto: in una gara di corsa tra il veloce Achille e la tartaruga, Achille concede un tratto di vantaggio alla tartaruga; dopo la partenza, Achille impiega un certo tempo per coprire tale tratto; ma in quell'intervallo di tempo la tartaruga avanza; quindi Achille deve impiegare un ulteriore intervallo di tempo per coprire tale seconda distanza; ma in quell'intervallo di tempo la tartaruga percorre un terzo tratto, e così via... Il risultato, paradossale, è che il velocissimo Achille non raggiungerà mai la lenta tartaruga.

L'analisi di questo celebre paradosso porta alla considerazione di una serie geometrica; e si tratta, come vedremo, di una serie

---

[5] Segnaliamo alcuni testi teorici: Weil, 1980; Swetz, 1989 e 1995; Pepe, 1990; Fauvel, 1990 e 1991; Fauvel & van Maanen, 1997. Furinghetti & Somaglia, 1997. Esempi interessanti sono in: Carruccio, 1972; D'Amore & Speranza, 1989, 1992 e 1995.

[6] Molti studiosi indicano in Zenone uno dei precursori dei metodi infinitesimali. Scrive L. Brunschvicg: «Pour retrouver le plus ancienne trace de la pensée infinitésimale, il faut nous adresser... à Zénon d'Elée"» (Brunschvigc, 1929); F. Enriques e G. de Santillana affermano a proposito del pensiero zenoniano: «Ma ritorniamo allo scopo principale della critica di Zenone, per rilevarne il più profondo significato matematico. I paradossi che il filosofo mette in luce sono quelli che si trovano sulla via dell'Analisi infinitesimale. La riflessione che riconosce l'idealità degli enti geometrici scopre, insieme al regno del pensiero, il mondo dell'infinito» (Enriques & de Santillana, 1936, p. 54).

convergente. Seguiamo l'impostazione di B. D'Amore e di M. Matteuzzi che notano:

«Se... consideriamo la retta come un continuo, e supponiamo che abbia lunghezza di 100 m il vantaggio concesso da Achille alla Tartaruga e posto che Achille vada 10 volte più veloce della Tartaruga, vediamo subito che il paradosso decade. Infatti, una volta che Achille avrà raggiunto la posizione di partenza della Tartaruga, essa avrà percorso 10 m. Raggiunta questa seconda posizione, Achille avrà uno svantaggio di 1 m; la Tartaruga si sarà nuovamente spostata; ma, raggiunto quest'altro punto, Achille avrà uno svantaggio di 1/10 di m... Dunque, per raggiungere la Tartaruga, Achille dovrà percorrere una distanza:

$$d = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$$

... da cui: $d = 111{,}1111\ldots$

Questo è un numero ben determinato, e non è affatto infinito. Achille avrà già superato la Tartaruga, ad esempio, dopo 111,111112 m» (D'Amore & Matteuzzi, 1976, pp. 28-29).

Ecco dunque un semplice esempio di un'addizione con infiniti addendi che non potrà mai superare, per quanti addendi consideriamo, un numero finito!

Può però sorgere un pericoloso equivoco: qualche allievo potrebbe osservare che gli addendi così sommati sono sempre più piccoli e che, anzi, tendono ad essere... piccoli quanto si vuole. E fin qui niente di male. Ma c'è il rischio di interpretare tale condizione (ovvero quella che prevede che il termine generale sia infinitesimo), che sappiamo essere *necessaria* affinché una serie sia convergente, come una condizione *sufficiente*.

Per contrastare la formazione di questa errata concezione, spostiamoci, nella storia della matematica, di diciotto secoli. Il parigino Nicola d'Oresme (1323-1382), vescovo di Lisieux, si occupò di procedimenti infiniti e diede la più antica dimostrazione della divergenza della serie armonica (modernamente) scritta:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

(e si tratta di una serie per la quale, come per la precedente, il termine generale è infinitesimo!). Il matematico francese suggerì di scrivere:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

ovvero di raggruppare le frazioni entro parentesi contenenti rispettivamente 1, 2, 4, 8, ... frazioni. La somma delle frazioni situate in ciascuna parentesi è allora non minore di ½; ed è possibile in questo modo ottenere un *qualsiasi* numero di parentesi. Dunque la somma della serie esaminata è maggiore di ogni costante arbitrariamente scelta (Bagni, 1996, I).

Abbiamo così tratto dalla storia della matematica un efficace controesempio: il nostro allievo potrà capire che la sola condizione che prevede che il termine generale sia infinitesimo *non* basta a garantire la convergenza di una serie.

1.2.3. Un'incognita: il *transfer* cognitivo

In questo paragrafo torneremo a considerare, in generale, l'impostazione didattica sopra presentata, ovvero la didattica come divulgazione delle idee. Un suo esame più profondo, come vedremo, porta alla considerazione di alcuni suoi limiti, che cercheremo di illustrare brevemente.

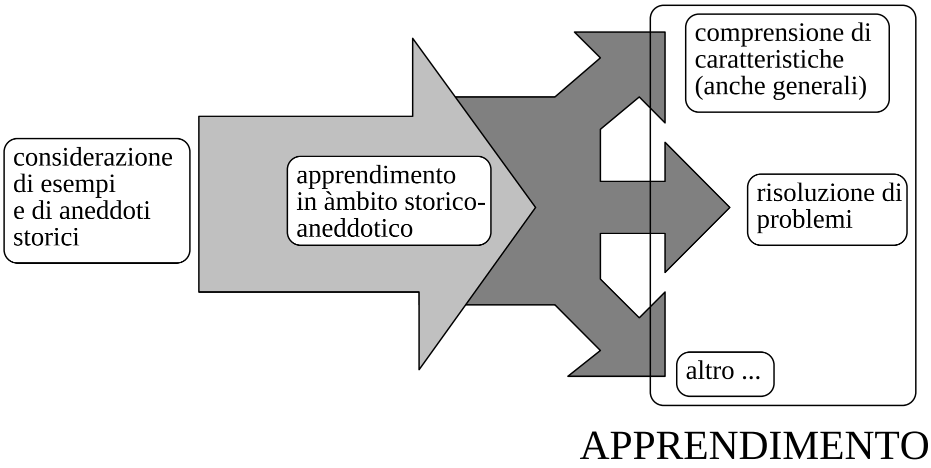
Facciamo riferimento ancora all'esempio sopra proposto: l'introduzione (simpatica, elegante) di alcuni contenuti elementari relativi alle serie numeriche mediante citazioni di storia della matematica. Riassumiamo quanto fatto.

Abbiamo innanzitutto illustrato un paradosso di Zenone per mostrare all'allievo che una somma di infiniti addendi può essere limitata. *E abbiamo supposto che la reazione del nostro allievo sia stata proprio tale da portarlo ad accettare che una somma di infiniti addendi può essere limitata.* In un secondo momento, *abbiamo supposto che l'allievo sia stato tratto in inganno dall'esempio indicato ed abbia interpretato erroneamente una condizione necessaria come una condizione sufficiente* (per la convergenza di una serie numerica). Per superare questo eventuale problema, abbiamo quindi proposto un procedimento di Nicola d'Oresme. *E abbiamo nuovamente supposto che la reazione del nostro allievo sia stata proprio quella da noi sperata (ipotizzata), ovvero tale da portarlo ad accettare definitivamente che la condizione in questione è necessaria ma non sufficiente.*

Attenzione: le supposizioni, come il lettore può notare, sono davvero tante. Troppe?

Il problema, più in generale, è questo: utilizzando forme di didattica riconducibili alla divulgazione delle idee, come sappiamo, noi agiamo sull'insegnamento. Bene. Ma il guaio è che non possiamo essere certi, *a priori*, dell'effetto che il nostro (rinnovato, migliorato) insegnamento potrà avere sull'allievo; non possiamo sapere con sicurezza che certe sollecitazioni porteranno a ben determinate (ed auspicabili) reazioni nella mente dell'allievo, che sono plausibili, ma non obbligatorie. Perciò la sottintesa equazione: "migliore insegnamento" uguale (sempre!) a "migliore apprendimento" è, purtroppo, tutt'altro che scontata.

Le "reazioni" alle quali abbiamo accennato devono essere ulteriormente precisate (D'Amore & Frabboni, 1996, pp. 97-98). In termini estremamente semplificativi, le cose stanno così: agendo secondo l'impostazione didattica ora considerata, abbiamo proposto all'allievo alcune sollecitazioni, in un ambito che potremmo indicare, nell'esempio specifico, come "storico-aneddotico". Diamo per accettato che, *in quest'ambito*, il nostro studente "apprenda". Ma la conoscenza così acquisita non può restare confinata solamente nell'ambito storico-aneddotico: ciò sarebbe ben poco utile; è invece necessario che essa si "trasferisca" ad àmbiti diversi, che essa possa essere utilizzata dallo studente per la risoluzione di problemi, per la corretta interpretazione di altri esempi, per l'apprendimento di ulteriori contenuti matematici inerenti all'argomento in questione (le serie numeriche). È necessario cioè che avvenga quello che viene denominato *transfer cognitivo*.



Ebbene, il problema principale che potenzialmente limita l'efficacia delle didattica della matematica intesa come divulgazione delle idee è questo: *operando esclusivamente sull'insegnamento non possiamo essere certi che avvenga (effettivamente e completamente) il transfer cognitivo*.

Ribadiamo che questo breve excursus deve essere considerato introduttivo. Non pretendiamo, in questa sede, di proporre una trattazione specialistica sul *transfer* cognitivo (rimandiamo il lettore interessato a studi specifici; ad esempio: Feldman & Toulmin, 1976). Ma la presenza del problema citato ha una netta influenza sulla scelta dell'impostazione della nostra ricerca didattica.

Pur senza trascurare la validità delle ricerche didattiche di questo tipo, collegate dunque alla divulgazione delle idee[7], ci porteremo

---

[7] Alcune delle quali, non lo si dimentichi, sono della massima importanza; si veda, per una presentazione storica ed epistemologica: Pescarini, 1995.

dunque verso un'altra impostazione della didattica della matematica.

1.2.4. L'epistemologia dell'apprendimento

Abbiamo rilevato che il limite della didattica della matematica intesa come divulgazione delle idee consiste nell'incertezza che permane a proposito degli effetti (sull'apprendimento) di certe scelte che noi insegnanti operiamo (con riferimento al nostro insegnamento). In particolare, tale incertezza riguarda il *transfer* cognitivo.

Come ovviare a tale situazione? È necessario intervenire sulla struttura e sugli scopi della ricerca didattica, inserendo una *verifica empirica* che possa rendere evidenti gli effetti sull'apprendimento delle scelte dell'insegnante. La presenza di questo aspetto sperimentale modifica nettamente la nostra ricerca e conferisce ad essa un particolare statuto epistemologico (per approfondire questo punto si veda: Feldman & Toulmin, 1975 e ancora: D'Amore & Frabboni, 1996; D'Amore 1999). Chiameremo tale impostazione *epistemologia dell'apprendimento*.

Nella ricerca didattica impostata secondo l'epistemologia dell'apprendimento sono presenti diversi tipi di tecniche per il rilevamento del dato sperimentale: ad esempio, vengono proposti dei test agli allievi, ed i risultati di tali test vengono interpretati anche sulla base di interviste, nelle quali gli allievi sono invitati ad illustrare e a motivare le proprie scelte[8]. Tutto ciò consente di giungere a conoscere più da vicino le reazioni dell'allievo, dunque l'effetto che le nostre scelte effettivamente comportano sull'apprendimento.

Le ricerche alle quali faremo riferimento in questo libro (come quelle riportate in appendice) sono tutte di questo secondo tipo.

[8] Invitiamo il lettore ad esaminare la struttura delle ricerche riportate in appendice. Si veda inoltre: D'Amore, 1991.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 1

Abraham, A. (1984), *L'einsegnant est une personne*, EST, Paris.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bara, B. (1990), *Scienza cognitiva*, Bollati Boringhieri, Torino.

Brunschvicg, L. (1929) *Les étapes de la Philosophie Mathématique*, Paris.

Bunge, M. (1985), *Epistemologia*, Ariel, Barcelona.

Caroni, V. & Iori, V. (1989), *Asimmetria nel rapporto educativo*, Armando, Roma.

Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1976), *Gli interessi matematici*, Marsilio, Venezia.

D'Amore, B. & Speranza, F. (a cura di) (1989), *Lo sviluppo storico della matematica*, I, Armando, Roma.

D'Amore, B. (1991), Ricerca-azione, possibile paradigma della ricerca in didattica: *La scuola se*, 79-80, 14-17.

D'Amore, B. & Speranza, F. (a cura di) (1992), *Lo sviluppo storico della matematica*, II, Armando, Roma.

D'Amore, B. & Speranza, F. (a cura di) (1995), *La matematica e la sua storia*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna.

Dienes, Z. (1963), *An experimental study of mathematics-learning*, Hutchinson, New York.

Duncker, K. (1969), *La psicologia del pensiero produttivo*, Giunti-Barbèra, Firenze (edizione originale: 1935).

Enriques F. & de Santillana, G. (1936), *Compendio di storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1973).

Fauvel, J. (1990), History in the mathematical classroom: *The IREM papers*, The Mathematical Association.
Fauvel, J. (1991), *For the learning of mathematics* (numero speciale sull'impiego della storia della matematica nell'insegnamento), 11, 2.
Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997), Storia e didattica della matematica: *Lettera Pristem*, 23, 8-13.
Feldman, C.F. & Toulmin, S. (1976), Logic and the theory of mind: Cole, J. K. (a cura di), *Nebraska symposium on motivation 1975*, University of Nebraska Press, Lincoln, London.
Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, D'Amore, B. (a cura di), Pitagora, Bologna.
Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an educational task*, Riedel, Dodrecht.
Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.
Gagné, R.M. (1973), *Le condizioni dell'apprendimento*, Armando, Roma (prima edizione: 1970).
Kleinmuntz, B. (1976), *Problem solving. Ricerche, modelli, teoria*, Armando, Roma.
Meirieu, P. (1987), *Apprendre... oui, mais comment?*, ESF, Paris.
Nesher, P. & Kilpatrick, J. (a cura di) (1990), *Cognition and mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
Pellerey, M. (1991), La ricerca in didattica della matematica: *Atti del Convegno "Processi cognitivi e problemi della ricerca didattica disciplinare"*, Milano.
Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica: *L'educazione matematica*, III, I, 2, 23-33.
Pescarini, A. (1995), Dinamiche dell'educazione matematica, *Bollettino degli insegnanti di matematica del Canton Ticino*, 30, 1-18.
Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.
Priore, F. (1990), *Modelli, strumenti e misure nella didattica contemporanea*, Mursia, Milano.
Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1991), *Picologia della matematica ed apprendimento scolastico*, Sei, Torino (prima edizione: 1981).

Swetz, F.J. (1989), Using problems from the history of mathematics in classroom instruction: *Mathematics teacher*, 82, 370-377.

Swetz, F.J. (1995), To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context: *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.

Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).

Weil, A. (1980), History of mathematics: why and how: Letho, O. (a cura di), *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, Helsinki 1978, I, 227-236.

Wertheimer, H. (1959), *Productive Thinking*, Harper & Row, New York.

❈❈❈