Συλλογισμός

Syllogismos

History and Epistemology for Mathematics Education

Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Appunti di didattica della matematica
(a cura di G.T. Bagni)

Capitolo 5
Ostacoli e apprendimento

5.1. TIPI DI OSTACOLI

5.1.1. Ostacoli e fallimenti

Sappiamo bene che l’apprendimento della matematica non è sempre lineare, semplice e indolore. Insomma, non sempre lo studente riesce a realizzare gli obiettivi didattici ed educativi connessi alla matematica: talvolta (spesso?) i nostri allievi “non capiscono”, riescono soltanto in parte a raggiungere i livelli di apprendimento sperati o programmati.

La matematica, tradizionalmente, è una materia “difficile”. Proprio per questa ragione, molto spesso, la matematica “fa paura”.

Perché accade ciò? Da che cosa dipendono le interruzioni, i blocchi improvvisi, i fallimenti nell’apprendimento della matematica? Quali elementi rendono difficoltosa (talvolta apparentemente quasi impossibile) la "crescita matematica" di uno studente della scuola secondaria superiore?

Evidentemente non è semplice rispondere in modo adeguato e completo a queste domande. Come vedremo, molti importanti elementi, alcuni dei quali già sfiorati nei capitoli precedenti, concorrono a costituire la tradizionale, temuta (inevitabile?) difficoltà che accompagna la matematica.

Bisogna innanzitutto considerare che i presunti ostacoli collegati all'apprendimento della matematica sono spesso rilevati mediante prove oggettive di valutazione, come la risoluzione di problemi e di esercizi nel corso di interrogazioni o di prove scritte[1]. E, frequentemente, eventuali fallimenti in queste prove sono determinati da elementi che possono anche essere in parte o del tutto estranei all'effettiva comprensione dei contenuti matematici in esame.

Ad esempio, ogni insegnante sa bene che un fallimento (anche pesante) in una prova scritta di matematica può essere determinato da diverse componenti emotive, da elementi caratteriali, o addirittura da condizioni esterne all'allievo (Gagné, 1973)[2].

Senza con ciò trascurare l'importanza di tali componenti, in questo capitolo ci occuperemo particolarmente delle

---

[1] Ricordiamo che, nel caso della risoluzione di problemi, il fallimento può avvenire nelle fasi seguenti (D'Amore, 1993a):

Lettura del testo.
Comprensione (traduzione) del testo.
Trasformazione del testo in modelli (grafici etc.).
Applicazione della tecnica risolutiva (aritmetica etc.).
Codificazione della risposta.

Secondo la *tesi di Clemens*, il fallimento avviene molto spesso nelle fasi , , (Clemens, 1980).

[2] Con ciò si intende ad esempio: stimoli (fisici, verbali, non-verbali, iconici...), condizioni ambientali (rumore, temperatura, pressione, luce...), esplicite direttive verbali da parte dell'insegnante, altre istruzioni (informazioni sulla natura delle soluzioni richieste, sulle regole da impiegare, sul processo da seguire...) (Gagné, 1973; D'Amore, 1993a).

questioni collegate in modo specifico all'apprendimento dei contenuti matematici.

5.1.2. Gli ostacoli: una prima classificazione

Per affrontare proficuamente l'argomento in questione, riteniamo opportuno classificare innanzitutto gli ostacoli che possono rendere arduo il superamento delle difficoltà nell'apprendimento della matematica.

A tale proposito, seguiamo la classificazione di G. Brousseau (faremo dunque riferimento a: Brousseau, 1983, come ricordato in: D'Amore, 1993a), il quale individua:

1) *Ostacoli di origine ontogenetica*. Si tratta di ostacoli che dipendono dai limiti neuro-fisiologici dell'allievo. Ogni insegnante sa che di fronte a sé non vengono a trovarsi studenti "ideali", pressoché perfetti, bensì ragazzi in carne ed ossa, talvolta limitati, insicuri: queste caratteristiche possono influenzare (negativamente) il rendimento scolastico (Pontecorvo, 1981).

2) *Ostacoli di origine didattica*. Dipendono dal sistema educativo adottato, dalle scelte operate dall'insegnante: dunque proprio l'insegnante può operare in termini decisivi per limitare l'influenza di questo genere di ostacoli.

3) *Ostacoli di natura epistemologica*. Dipendono dalla natura della disciplina (e sono, dunque, inevitabili). Inutile illudersi: alcuni contenuti matematici *non* sono banali, *non* sono immediatamente comprensibili. Se, da un lato, è assurdo che l'allievo "rinunci in partenza", che finisca per trincerarsi dietro ad un "io non ce la farò mai a capire questa roba" (atteggiamento, purtroppo, non del tutto infrequente), d'altro canto è sciocco e controproducente presentare tutta la matematica come un elementare e divertente giochetto. *Non è così*. La matematica è bella, certo; e vale davvero la pena di impegnarsi a fondo per

comprendere la sua eleganza. Ma non sempre la matematica è "facile" (si veda anche: Glaeser, 1984).

In questo lavoro ci occuperemo principalmente degli ostacoli di origine didattica. In particolare, esamineremo gli ostacoli dipendenti dal linguaggio e dedicheremo una sezione alla visualizzazione, ovvero al ruolo delle immagini (disegni, diagrammi, rappresentazioni grafiche etc.) nell'apprendimento di alcuni argomenti di matematica nella scuola secondaria superiore.

5.2. OSTACOLI LINGUISTICI

5.2.1. Leggibilità

Le nostre lezioni, i testi dei problemi, le domande che proponiamo ai nostri allievi durante le prove orali sono in gran parte espressi mediante frasi, mediante parole, termini tratti dal linguaggio naturale e dal cosiddetto linguaggio matematico. Una delle principali questioni che, in qualità di insegnanti, dobbiamo (continuamente) affrontare è dunque la seguente: siamo davvero sicuri che il nostro interlocutore (l'allievo) sia in grado di comprendere il nostro messaggio (ad esempio: la domanda posta, il testo dell'esercizio, l'enunciato del problema, il contenuto delle nostre spiegazioni)?

Si tratta evidentemente di un argomento molto delicato, che non ci illudiamo di poter trattare completamente in poche pagine: ma, considerata la sua importanza, cercheremo di fornire al lettore lo spunto per qualche riflessione ed alcune indicazioni per ulteriori approfondimenti.

Esaminiamo innanzitutto il problema della comprensibilità di un testo scritto.

Un'osservazione di A. Gagatsis sottolinea l'importanza della lettura di un testo matematico:

«La lettura è superiore in efficacia rispetto agli altri mezzi di informazione. Il lettore può sempre tornare sul suo testo per approfondirne progressivamente il contenuto (per esempio in matematica), cosa che non si potrebbe fare ascoltando la radio. D'altra parte, si sa che la lettura permette di comprendere un messaggio circa 3 volte più velocemente rispetto al semplice ascolto (27000 parole lette ogni ora, contro 9000 parole ascoltate)» (Gagatsis, 1995).

Ma è (sempre) semplice leggere e comprendere un testo in generale, e un testo matematico in particolare?

Per dare un'idea al lettore di come è possibile valutare la "facilità" di un testo, proponiamo la *formula di leggibilità di R. Flesh* (originariamente elaborata per la lingua inglese, adattata al francese da L. Kaudel e A. Moles ed al greco: Gagatsis, 1995). La *facilità* di un testo può essere espressa dalla quantità seguente:

$$206{,}85 - 0{,}59x - 1{,}015y$$

con: x = numero di sillabe per 100 parole
y = numero di parole per frase

Indicando con p il numero di parole, con s il numero di sillabe e con f il numero di frasi, otteniamo per la facilità:

$$206{,}85 - \frac{s \cdot 100}{p} \cdot 0{,}59 - \frac{p}{f} \cdot 1{,}015$$

Va sottolineato che la formula ora ricordata è costruita per testi letterari; la sua applicazione a testi matematici può dunque essere difficoltosa. Ma è interessante indicare qualche esempio.

Consideriamo il testo A:

«Nei primi decenni del Duecento la diffusione in Europa dei risultati matematici arabi ed indiani è uno dei più importanti elementi di rinascita della matematica occidentale. La figura di maggior rilievo in ambito europeo è Leonardo da Pisa detto Fibonacci. Figlio di un funzionario pisano, Leonardo viaggia molto; egli ha quindi la possibilità di entrare in contatto con le tradizioni culturali straniere. Pubblica il *Liber Abaci*, opera fondamentale per la storia della matematica. La fortuna dei manuali di matematica, in particolare di quelli di aritmetica pratica, risale dunque ad alcuni secoli prima dell'introduzione della stampa a caratteri mobili».

In questo caso, abbiamo:

$$p = 99 \qquad s = 247 \qquad f = 6$$

e la facilità del testo (A) è: $206{,}85 - \frac{s \cdot 100}{p} \cdot 0{,}59 - \frac{p}{f} \cdot 1{,}015 = 42{,}9$.

Consideriamo il testo B:

«La Didattica della Matematica si colloca sempre in un contesto sociale, all'interno di alcuni tipi di strutture istituzionali, dove una parola chiave che caratterizza la situazione è *umanizzazione*. La Matematica è intesa come una disciplina specificamente benevola, non caratterizzata da severità e intolleranza, ma dall'apertura verso un ampio spettro di approcci. Ci si focalizza sugli studenti come singoli, con il loro personale sviluppo, con le loro necessità, ma anche sulle relazioni tra coloro che professionalmente intervengono nella Didattica della Matematica. I procedimenti matematici sono considerati molto più dei prodotti matematici, non richiedendo specifici obiettivi».

In questo secondo caso, abbiamo:

$$p = 96 \qquad s = 253 \qquad f = 4$$

e la facilità del testo (B) è: $206{,}85 - \frac{s \cdot 100}{p} \cdot 0{,}59 - \frac{p}{f} \cdot 1{,}015 = 27{,}0$.

Possiamo quindi concludere che (limitatamente all'analisi condotta mediante la formula di Flesh, sopra ricordata), il testo (A) risulta più 'leggibile' del testo (B) [3].

5.2.2. Variabili redazionali

Le formule di leggibilità sono però riferite esclusivamente all'aspetto formale; esse forniscono indicazioni certamente interessanti, ma che non possono essere considerate esaustive. In altri termini, non è sufficiente che un testo abbia un elevato indice di leggibilità, ad esempio secondo la formula di Flesh, affinché tale testo possa essere considerato chiaro e didatticamente efficace. Per stabilire se un testo matematico (ad esempio l'enunciato di un problema) è davvero comprensibile, dobbiamo evidentemente condurre un attento esame critico anche dei suoi contenuti (Goldin & Caldwell, 1979; Webb, 1979).

A tale proposito, C. Laborde ha proposto le seguenti *variabili redazionali* da valutare nell'enunciato di un problema:

1) Grado di esplicitazione ottenuto dall'impaginazione, dalla punteggiatura e dalle strutture sintattiche impiegate.
2) Complessità sintattica.
3) Densità dell'enunciato.
4) Ordine delle informazioni fornite.
5) Differenza tra la forma in cui le informazioni sono date e quella in cui le si deve trattare nella risoluzione.
6) Grado di esplicitazione degli oggetti intermedi utili alla risoluzione del problema (Laborde, 1995).

Analizziamo, seguendo l'impostazione di Laborde, il semplice testo seguente:

---

[3] In effetti, il testo (A) è tratto da una pubblicazione destinata a studenti della scuola secondaria, il testo (B) da un articolo specialistico in didattica della matematica.

Calcolare il rapporto delle altezze di due rettangoli equivalenti con le basi rispettivamente di 12 cm e di 15 cm.

L'enunciato di questo problema appare sintetico, ben posto: ma è davvero chiaro? È didatticamente efficace?

Prima di rispondere dovremmo dare un'esauriente definizione di questa "efficacia didattica" (e vedremo tra poco che una tale definizione è tutt'altro che scontata). Possiamo però esaminare punto per punto le variabili redazionali:

1) La punteggiatura non è utilizzata. Il citato "rapporto delle altezze" potrebbe essere riferito ad entrambe le situazioni:

altezza maggiore : altezza minore
altezza minore : altezza maggiore

e ciò può essere causa di perplessità.

2) L'enunciato appare complesso: è costituito da un solo periodo, con una proposizione subordinata. Il termine "rispettivamente" richiede attenzione da parte dell'allievo.

3) L'enunciato (appena di due righe) appare piuttosto denso.

4) La domanda è posta all'inizio.

5) Le informazioni sono date nell'ordine inverso rispetto a quello in cui esse possono essere trattate, ad esempio, in una risoluzione del tipo:

altezza A = area A : base A = area A : 12 cm
altezza B = area B : base B = area B : 15 cm
(essendo area A = area B) altezza A : altezza B =
= (area A : 12 cm) : (area B : 15 cm) = 5/4

6) L'informazione relativa al passaggio fondamentale (l'uguaglianza delle aree) è appena accennata ed è celata nel termine "equivalente".

Non possiamo certo dire che la situazione delle variabili redazionali così rilevata sia tale da favorire la comprensione e da agevolare la risoluzione da parte dell'allievo. Proviamo dunque a "migliorare le cose", ovvero a riscrivere l'enunciato del problema assegnato nel modo seguente (Bagni & Giovannoni, 1996):

Il rettangolo A ha la base di 12 cm; il rettangolo B ha la base di 15 cm. L'area del rettangolo A è uguale all'area del rettangolo B. *Calcolare il rapporto tra l'altezza del rettangolo A e l'altezza del rettangolo B.*

Esaminiamo nuovamente il testo secondo l'impostazione di C. Laborde:

1) La punteggiatura è utilizzata. Il "rapporto delle altezze" richiesto viene indicato esplicitamente.

2) L'enunciato, ora costituito da quattro proposizioni distinte, appare meno complesso. Non compare il (pericoloso) termine "rispettivamente".

3) L'enunciato (di cinque righe) è lungo, ma non è particolarmente denso.

4) La domanda è posta alla fine ed è chiaramente evidenziata (si va addirittura a capo).

5) Le informazioni sono date nell'ordine in cui possono essere trattate nella risoluzione (sopra accennata).

6) L'informazione relativa al passaggio fondamentale (l'uguaglianza delle aree) è ora ben evidenziata.

Dobbiamo dunque concludere che il testo del problema, così riformulato, è "migliore" del testo originale?

No, non possiamo affermarlo, in quanto non esiste, in assoluto, *un* criterio per stabilire quando un testo sia da considerare "migliore" di un altro. Se per "migliore" intendiamo più comprensibile, più "facile", allora dobbiamo concludere che il testo riformulato sia da preferire a quello originale; *ma non è detto che sia così*: ad esempio, è possibile che l'insegnante abbia voluto proporre la versione meno "facile" proprio per saggiare, negli allievi, la capacità di interpretare un testo impegnativo.

È tuttavia importante sottolineare che gli ostacoli connessi alla lettura e all'interpretazione del testo costituiscono un aspetto fondamentale di un problema, un elemento spesso di notevole importanza con riferimento alla sua difficoltà.

Dunque, i due problemi espressi da:

> *Calcolare il rapporto delle altezze di due rettangoli equivalenti con le basi rispettivamente di 12 cm e di 15 cm.*

> *Il rettangolo A ha la base di 12 cm; il rettangolo B ha la base di 15 cm. L'area del rettangolo A è uguale all'area del rettangolo B.*
>
> *Calcolare il rapporto tra l'altezza del rettangolo A e l'altezza del rettangolo B.*

hanno forse la stessa risoluzione, ma *non* la stessa difficoltà. *Non* sono lo stesso problema[4].

---

[4] Nello stesso lavoro, la ricercatrice francese suggerisce alcune attività per migliorare la capacità di lettura degli enunciati dei problemi:

- domandare agli allievi di risolvere problemi con dati superflui;
- domandare agli allievi di produrre un testo (ad esempio: un problema) destinato a dei compagni:
- porre agli allievi domande sul contenuto di testi: una data informazione è presente? C'è un'informazione che ne implichi un'altra, o che la contraddica?
- ricomporre un testo dato in più pezzi;
- trovare la domanda di un problema di cui si dia una soluzione;
- redigere alla maniera di questo o di quell'altro enunciato l'enunciato di un problema (Laborde, 1995).

5.2.3. Un esempio tratto dall'Analisi matematica

Ogni testo di analisi matematica riporta, tra le proprietà delle derivate, l'enunciato (e la dimostrazione) della proposizione che sancisce la linearità dell'operatore di derivazione D. Come possiamo esprimere tale proprietà?

Iniziamo con un'espressione senza dubbio "rigorosa":

> se f e g sono funzioni derivabili
> e se k e h sono costanti reali, allora:
> $\mathrm{D}(kf+hg) = k\mathrm{D}f+h\mathrm{D}g$

Niente da dire: la proprietà è enunciata correttamente, in forma compatta ed elegante. Ma è sempre chiara, viene ben compresa da tutti gli studenti? È tale da agevolare la comprensione da parte dell'allievo?

Prima di rispondere, è necessario riflettere sull'importanza (anche pratica) connessa a tale proprietà. Che cosa "fanno" i nostri allievi in virtù della proprietà ricordata? Quali operazioni, quali procedimenti vengono consentiti agli studenti dalla linearità della derivata?

La risposta (in linguaggio "naturale") è abbastanza semplice:

- quando si deve derivare una somma di funzioni, essa può essere derivata "addendo dopo addendo";
- una costante moltiplicativa può essere "portata fuori" dall'operatore di derivata.

Consideriamo allora una scrittura "alternativa" alla precedente, forse meno compatta, ma non necessariamente meno corretta:

> se f e g sono funzioni derivabili e se k è una costante reale, allora:

$$\begin{cases} \mathrm{D}(f+g) = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g \\ \mathrm{D}(kf) = k\mathrm{D}f \end{cases}$$

A livello di precisione formale, nulla da dire. Ma la "suddivisione" della proprietà in due parti sembra meglio rappresentare ciò che i nostri allievi, effettivamente, fanno.

Possiamo pertanto concludere che quest'ultima scelta, a parità di "rigore" formale, può essere preferibile per la sua maggiore chiarezza.

5.2.4. La delicata questione del rigore

Uno degli obiettivi che molti insegnanti si propongono è di portare i propri allievi alla comprensione e all'uso di un linguaggio matematico "rigoroso". Lodevole intenzione, in generale. Ma essa necessita di qualche chiarimento, al fine di evitare pericolosissimi malintesi: quando un'espressione matematica (ovvero: riguardante argomenti matematici) può essere considerata, in effetti, rigorosa? Insomma, che cosa significa "rigore"? E quale "rigore" possiamo e dobbiamo esigere dai nostri allievi?

Cercheremo di rispondere a queste (insidiose) domande esaminando innanzitutto la traccia di un problema, tratta da un libro di testo di geometria elementare utilizzato nelle scuole secondarie:

> *L'area di un trapezio isoscele è m^2 324 e la sua altezza è m 27. Calcolare le basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.*

Dedicheremo qualche pagina all'analisi approfondita di questo enunciato, apparentemente chiaro e corretto. Un suo attento esame, infatti fa sorgere qualche perplessità:

I. *L'area... è m^2 324...* Come va espressa l'area?
Qual è il ruolo dell'unità di misura?

II. *Calcolare le basi...* Posso "calcolare" dei segmenti?

Prima di procedere, ricordiamo alcune riflessioni sui concetti, continuamente impiegati proprio nelle questioni di geometria elementare, di segmento, di misura, di superficie, di area, di volume. Iniziamo dai segmenti. Com'è noto, è necessario distinguere tra:

Segmento	*Figura geometrica* *(parte di retta)*
Estensione di un segmento (spesso non considerata)	*Ciò che hanno in comune* *più segmenti congruenti*
Misura di un segmento	*Rapporto tra il segmento dato* *e un segmento scelto come* *unità di misura (non necessario* *ricorrere alle loro estensioni)* Attenzione: la misura è dunque un numero puro e va espressa: $\overline{AB} = 12$ (rispetto al metro)

È importante osservare che, per i segmenti, congruenza ed equivalenza coincidono; ciò significa che il confronto di segmenti può avvenire anche senza considerare l'estensione.

Consideriamo ora le figure piane:

Figura piana	*Figura geometrica* *(parte di piano)*
Estensione superficiale (è fondamentale, nel caso delle figure piane)	*Ciò che hanno in comune* *più figure piane equivalenti* *(ma non necessariamente* *congruenti)*
Area (misura di una figura piana)	*Rapporto tra la figura data* *e una figura scelta come* *unità di misura (nel senso* *dell'equivalenza: quindi* *è il rapporto tra le loro* *estensioni superficiali)*

Attenzione: è un numero puro
e va dunque espressa così:

Area(ABC) = 12
(rispetto al metro quadrato)

Per le figure piane congruenza ed equivalenza non coincidono! Il confronto di figure piane non può avvenire senza considerare l'estensione.

Accenniamo infine, per amor di completezza, alle figure solide (sebbene il problema sopra considerato riguardi la geometria piana):

Figura solida	*Figura geometrica (parte di spazio)*
Estensione spaziale (fondamentale, nel caso delle figure solide)	*Ciò che hanno in comune più figure solide equivalenti (ma non necessariamente congruenti)*
Volume (misura di una figura solida)	*Rapporto tra la figura data e una figura scelta come unità di misura (nel senso dell'equivalenza: quindi è il rapporto tra le loro estensioni spaziali)* Attenzione: è un numero puro e va dunque espresso così: Volume(ABCDE) = 60 (rispetto al metro cubo)

Per le figure solide, come per quelle piane, congruenza ed equivalenza non coincidono. Il confronto di figure solide non può avvenire senza considerare l'estensione.

Alla luce delle considerazioni precedenti, possiamo cercare di "correggere" la traccia inizialmente proposta, che riportiamo nuovamente:

L'area di un trapezio isoscele è m^2 324 e la sua altezza è m 27. Calcolare le basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.

Questo enunciato, adesso, *non* ci sembra sufficientemente rigoroso. Ricordiamo infatti le nostre iniziali perplessità:

I. *L'area... è m^2 324...* Qual è il ruolo dell'unità di misura?

La risposta, ora, appare semplice: l'area è una misura e quindi è un numero puro (un rapporto di grandezze omogenee): il numero che la esprime *non* deve dunque essere preceduto o seguìto dall'unità di misura.

II. *Calcolare le basi...* Posso "calcolare" dei segmenti?

Evidentemente no: i segmenti sono *figure geometriche*. Possono essere calcolati dei numeri (ovvero, ad esempio, le *misure* delle figure), ma non delle figure geometriche!

Ecco dunque la nostra traccia "riveduta e corretta" (essa fa sempre riferimento a misure: esprimiamo anche l'altezza in termini di misura):

L'area di un trapezio isoscele è 324 rispetto al m^2 e la misura della sua altezza è 27 rispetto al m. Calcolare le misure delle basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.

Bene, senza dubbio abbiamo fatto molti passi nella direzione di un linguaggio (pienamente?) "rigoroso". Ma... che fatica! Le considerazioni precedenti sono state infatti dettate da uno sviluppo attento e preciso della teoria, uno sviluppo che richiede evidentemente molta cautela e che coinvolge concetti anche piuttosto delicati[5]. E non possiamo

[5] In effetti, bisognerebbe distinguere fra:

dimenticare che tali osservazioni riguardano un ben limitato settore della matematica: distinzioni analoghe (se non addirittura più profonde) dovrebbero essere messe a punto *per ogni altro campo della matematica*, per ogni altro argomento.

Possiamo (dobbiamo) esigere dai nostri allievi una simile attenzione? Non pretendiamo di dare una risposta secca, valida sempre e per tutti[6]. Per evitare equivoci, ripetiamo quanto affermato all'inizio di questo paragrafo: il tentativo di portare i propri allievi ad impiegare un linguaggio matematico "rigoroso" è una lodevole intenzione, è un obiettivo importante per ogni insegnante. Non intendiamo certamente avallare una pratica matematica linguisticamente scorretta o comunque approssimativa! Tuttavia ogni insegnante deve essere consapevole delle reali difficoltà che l'uso di questo linguaggio "rigoroso" comporta per l'allievo, difficoltà che si sovrappongono, spesso pesantemente, a quelle che la risoluzione di un problema già comporta (si veda: D'Amore & Plazzi, 1990).

Grandezze di primo genere (esempi: segmenti, angoli piani, …): la relazione di equivalenza coincide con quella di congruenza (coppie di grandezze equivalenti sono anche congruenti).

Grandezze di secondo genere (esempi: poligoni, prismi, …): la relazione di equivalenza coincide con quella di equiscomponibilità ma non con quella di congruenza (coppie di grandezze equivalenti sono equiscomponibili, ma esistono coppie di grandezze equivalenti non congruenti).

Grandezze di terzo genere (esempi: figure piane aventi contorni mistilinei, poliedri, …): la relazione di equivalenza non coincide con quella di equiscomponibilità (esistono coppie di grandezze equivalenti non equiscomponibili) (Amaldi, 1900).

[6] Ricordiamo ancora alcune considerazioni di U. Amaldi che riguardano l'argomento trattato nelle pagine precedenti: «È possibile sviluppare tutta la teoria elementare delle grandezze poligonali e poliedriche senza introdurre nessun nuovo postulato oltre quelli dell'*appartenenza*, dell'*ordinamento* e della *congruenza*. E si può anche notare che gli sviluppi a ciò necessari non sono più elevati, né più laboriosi di altre teorie che, per unanime consenso, sono considerate come accessibili alla maggioranza degli alunni delle scuole medie. Cionondimeno noi crediamo che un tale assetto della teoria non sia didatticamente raccomandabile. La concezione delle *superficie* e dei *volumi* quali *grandezze* è di una evidenza altrettanto spontanea, quanto ciascuna delle altre verità intuitive, che si sogliono assumere a postulati» (Amaldi, 1900).

Non dovremmo inoltre dimenticare che anche la storia della matematica ha visto una continua evoluzione del concetto di "rigore". Nota a tale proposito U. Bottazzini:

«Il rigore in matematica è anch'esso un concetto 'storico' e dunque in divenire… Appellarsi all'esigenza del rigore nello spiegare lo sviluppo della matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di nuovi *standard* di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica» (Bottazzini, 1981, p. 13).

E scrive il "rigorosissimo" N. Bourbaki:

«È da venticinque secoli che i matematici hanno l'abitudine di correggere i loro errori e vedere così la loro scienza arricchita, e non impoverita; ciò dà loro il diritto di guardare al futuro con serenità» (Bourbaki, 1963).

Ogni errore, dunque, può essere proficuamente corretto; anche qualche carenza di rigore può essere utilmente rilevata e, dopo un'adeguata motivazione, rettificata.

A ciascun insegnante spetta dunque il non facile compito di valutare attentamente il ruolo (meditato, equilibrato) da assegnare al rigore ed alla correttezza formale nell'ambito della propria programmazione, tra i propri obiettivi didattici. Rinunciare ad un'espressione corretta significa abbandonare un'importante aspetto, una fondamentale caratteristica della matematica. Fare dell'espressione formale il primissimo (o l'unico!) obiettivo del proprio insegnamento può rivelarsi altrettanto sbagliato e deleterio.

5.2.5. Il "matematichese"

Prima di abbandonare l'importante e delicata questione del rigore, segnaliamo un rischio che una poco oculata gestione dell'argomento potrebbe comportare: l'impiego, da parte degli allievi, di un "linguaggio pseudo-matematico" costituito dall'accostamento di termini tratti da libri di testo, da espressioni utilizzate dall'insegnante nel corso delle spiegazioni; un accostamento, però, in parte o del tutto privo di significato. La nascita, insomma, di un terribile "matematichese", di una vuota, inutile e dannosa accozzaglia di termini che nulla ha ormai a che fare con il benché minimo contenuto matematico.

Come è possibile che accada ciò? Semplice, purtroppo: l'allievo, magari in difficoltà nel corretto apprendimento di qualche contenuto matematico, cerca di imitare l'insegnante, cerca di rifarsi (almeno con qualche parola!) al libro di testo, con ciò sperando di "dare un'impressione positiva", di ottenere quindi comunque l'agognata "sufficienza". Abbiamo già visto qualco sa del genere nel capitolo precedente, dedicato al contratto didattico. L'allievo sembra pensare: il mio insegnante mi valuterà positivamente soltanto se riuscirò a fare ciò che lui mi chiede; ebbene, ciò che lui mi chiede (l'ho già constatato nelle spiegazioni, in altre interrogazioni, nel libro di testo che mi viene chiesto di utilizzare) è un "discorso" infarcito da "termini matematici"; pertanto non mi resta che usare, comunque, questi benedetti termini, cercando di dare un tono altisonante alla mia esposizione.

Il risultato? Un completo disastro. L'apprendimento non migliora di certo, e al contempo i termini matematici, così banalizzati, perdono il loro significato e, dunque, la loro importanza. La preoccupazione di "dover usare un ben determinato linguaggio", nella mente già disorientata dell'allievo, si sovrappone all'esigenza di "capire": la situazione di confusione finisce dunque per peggiorare. E la stessa immagine della matematica, forse già debole nella concezione del povero studente, crolla. Definitivamente.

È evidente che non c'è più alcunché di corretto, di "rigoroso" in una situazione come quella ora descritta. Il disperato tentativo di utilizzare qualche termine "matematico" rincorrendo qualche definizione, qualche teorema, qualche dimostrazione non può essere considerato didatticamente utile, da alcun punto di vista[7].

Non ci resta pertanto che ribadire quanto già anticipato nel paragrafo precedente, ovvero che la ricerca di un'espressione rigorosa dei contenuti matematici deve essere condotta con l'indispensabile prudenza[8].

5.2.6. Dimostrare e convincere

Spesso, nei corsi scolastici di matematica e nei libri di testo (pensiamo soprattutto alla scuola secondaria superiore), la dimostrazione viene considerata il momento essenziale dell'intera trattazione di una questione matematica, anche dal punto di vista didattico. Talvolta questa impostazione porta ad attribuire alla dimostrazione un ruolo preponderante: osserva F. Speranza che «siamo stati educati nell'ideale aristotelico-euclideo nel quale la matematica viene presentata secondo lo schema *enunciati-dimostrazioni*. Siamo arrivati a far coincidere con questo

---

[7] La questione è piuttosto complicata e non è certo esaurita in questa sede. Il lettore potrà consultare ad esempio: D'Amore, 1993b; Maier, 1993.

[8] Non sarà inutile sottolineare che anche nei testi ministeriali proposti come traccia per la prova scritta degli esami di maturità rileviamo la presenza di qualche "infortunio formale" (si veda la ricerca riportata in appendice indicata con la lettera B). Limitandoci ai casi più recenti, troviamo ad esempio nella traccia proposta all'esame di maturità scientifica 1993, sessione ordinaria, l'assegnazione della qualifica di funzione ($x \rightarrow y$) ad una relazione ($x \rightarrow y$) espressa da $y = \pm f(x)$ (Bagni, 1993a). Più grave è la situazione della traccia della maturità scientifica 1995, sessione ordinaria, in cui leggiamo: «Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce ABCD e EFGH sono opposte ed i segmenti AE, BF, CG sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria. Sullo spigolo BF prendere un punto P tale che: $= x$. a) Verificare che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla seguente funzione: $y =$. b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti». Consideriamo il problema geometrico così descritto: l'appartenenza di P allo spigolo BF di "lunghezza unitaria", con $= x$, impone la limitazione $0 <= x <= 1$: non ha alcun senso affermare (senza specificare il dominio!) che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla $y =$. Sarebbe stato necessario indicare tale funzione precisandone il dominio, che *non* è tutto **R**. E la richiesta al punto (b) (di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, *dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti*) diventa davvero problematica: non è facile considerare gli asintoti di una funzione continua definita nell'intervallo chiuso e limitato [0; 1]. Come la mettiamo, ad esempio, con il teorema di Weierstrass? (Bagni, 1995).

stile la *sostanza* della razionalità matematica» (Speranza, 1992, p. 135).

Non intendiamo negare l'importanza primaria della dimostrazione, sia per la ricerca sia nell'ambito della didattica disciplinare; eppure, nota ancora Speranza, «in quanto alla pratica matematica, le dimostrazioni sono solo una parte del lavoro (anche per i matematici 'puri'): essa è preceduta da una fase di intuizioni, di congetture, di tentativi che via via si perfezionano» (Speranza, 1992, p. 135).

Il ruolo di questa fase pre-dimostrativa, generalmente affidata a capacità di intuizione[9] prima ancora che di organizzazione razionale della dimostrazione, è rilevante (Mazzanti & Piochi, 1990; Dapueto, 1992, p. 39), soprattutto se si considera che «la dimostrazione… non dà necessariamente il massimo convincimento» (Speranza, 1992, p. 137). Osserva E. Fischbein:

«*Capire intuitivamente* non significa semplicemente *vedere*... Dobbiamo considerare tre livelli di accettazione intuitiva. Un primo livello si riferisce al fatto espresso dall'affermazione stessa... Un secondo livello si riferisce alla struttura della dimostrazione: un allievo può capire intuitivamente il significato di un teorema ma può non essere in grado di capire intuitivamente la struttura della rispettiva dimostrazione (sebbene sia in grado di memorizzare e di capire formalmente i suoi passi)…Il terzo

[9] Sul significato del termine intuizione in ambito matematico, F. Furinghetti annota (riferendosi a Davis & Hersh, 1980, p. 391): «Il problema del significato dell'intuizione è prima di tutto glottologico... L'ambiguità e il mistero che circonda questo termine possono spiegarsi col fatto che nell'immagine comune la matematica è associata alla pura deduzione logica, per cui ogni fatto discende strettamente e 'fatalmente' dai precedenti; certi processi di acquisizione di nuova conoscenza (e, tra essi, in particolare, le scoperte/invenzioni matematiche) sembrano avvenire saltando alcuni anelli della catena di deduzioni e…creano la necessità di un elemento 'estraneo' (l'intuizione, appunto) che entri in gioco a spiegare ciò che è avvenuto» (Furinghetti, 1992, p. 85). Citiamo E. Fischbein: «La più diffusa interpretazione di intuizione è che l'intuizione è senso comune… Il fatto che questa identificazione è in parte corretta ha probabilmente bloccato gli interessi degli psicologi nello studio del fenomeno dell'intuizione» (Fischbein, 1993, p. 1).

livello si riferisce al fatto di capire la validità universale dell'affermazione come garantita ed imposta dalla validità della dimostrazione» (Fischbein, 1993, p. 22).

Tali idee si riflettono sulla concezione e sul ruolo della dimostrazione:

«Formalmente non c'è differenza tra l'accettare la correttezza di una dimostrazione matematica e l'accettare l'universalità di un'affermazione come garantita da quella dimostrazione. Il fatto che, per l'alunno, ci sia differenza tra accettare una dimostrazione ed accettare l'universalità dell'asserto provato da essa dimostra che si può prendere in considerazione un elemento in più. Tale elemento aggiuntivo è costituito dal bisogno di un'accettazione intuitiva complementare della capacità predittoria assoluta di un'affermazione che è stata formalmente provata» (Fischbein, 1993, pp. 22-23; si veda anche: Lolli, 1989).

Una vasta e profonda ricerca attualmente in corso (Arrigo & D'Amore, 1998, *comunicazione privata all'autore*) è dedicata allo studio delle reazione degli allievi di vari livelli scolastici (particolarmente della scuola secondaria superiore) di fronte ad alcune dimostrazioni riguardanti l'infinito.

Da uno degli esempi esaminati nell'ambito di tale ricerca, la scrittura di un numero decimale periodico in forma di frazione (in particolare l'interpretazione di un periodico con periodo 9), traiamo lo spunto per alcune riflessioni sulla dimostrazione in didattica[10].

[10] Sulla questione c'è una vastissima bibliografia, che può essere vista in: D'Amore, 1996 e 1997. C. Dapueto segnala la possibilità di «definire direttamente i numeri reali come numeri decimali illimitati», ma è necessario «precisare che quando si costruisce un nuovo insieme di oggetti matematici occorre definire una nuova nozione di identità: ad esempio…nel caso dei numeri reali definiti come sopra occorrerebbe precisare che sono da considerarsi eguali come numeri le espressioni 1.3999…e 1.40000…La nozione di relazione di equivalenza dovrebbe, cioè, avere un uso diffuso, non essere limitata a riflessioni di insiemistica che, di fatto, rimarrebbero marginali» (Dapueto, 1992, p. 37).

A tale proposito, consideriamo le due seguenti schede: nella prima è riportata una "tradizionale" dimostrazione mediante la quale si prova che $0,\overline{9}$ non è un numero minore di 1, anzi che risulta: $0,\overline{9} = 1$; nella seconda si afferma che $0,\overline{9}$ non è minore di 1 mediante un'argomentazione che può apparire certamente meno "rigorosa", basata su di un semplice procedimento pratico proposto all'allievo.

Scheda A

Dimostriamo che $0,\overline{9}$ non è un numero minore di 1.

Per fare ciò dimostreremo che è: $0,\overline{9} = 1$.

Infatti possiamo scrivere:

$$0,\overline{9}\cdot 10 = 9,\overline{9}$$
$$0,\overline{9}\cdot 10 = 9+0,\overline{9}$$
$$0,\overline{9}\cdot 10-0,\overline{9} = 9$$
$$0,\overline{9}\cdot (10-1) = 9$$
$$0,\overline{9}\cdot 9 = 9$$
$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} \qquad \text{cioè: } 0,\overline{9} = 1$$

Scheda B

Immaginiamo un numero positivo scritto in forma decimale minore di 1; ad esempio: $a = 0,68422432763$.

Consideriamo ora il seguente esercizio:

Scrivere un numero *b*, in forma decimale, minore di 1 e maggiore di *a*.

Ci chiediamo innanzitutto: **è sempre possibile risolvere questo esercizio?**

Per rispondere, ripensiamo al numero a, che sappiamo essere minore di 1; la differenza tra 1 e a è $1-a$, un numero positivo. Ebbene, se ad esempio aggiungiamo ad a un numero positivo più piccolo di 1–*a* (ad esempio: la metà, o la terza parte di 1-*a*) otteniamo un numero certamente maggiore di *a* e minore di 1. **Dunque l'esercizio è sempre risolubile: basta che *a* sia minore di 1**.

Affrontiamo ora praticamente l'esercizio: per scrivere un numero *b* maggiore di *a* (e sempre minore di 1) possiamo operare nel modo seguente:

Procedimento: scriviamo un numero che, in forma decimale, coincida con *a* "fino a un certo punto", cioè abbia le prime cifre decimali uguali a quelle di *a* **e quindi abbia una cifra decimale maggiore della corrispondente cifra di *a***. A questo punto il nostro *b* è già maggiore di *a* (e, dato che ha uno 0 prima della virgola, è minore di 1): tutto ciò che scriveremo dopo non avrà più importanza (potremmo anche non scrivere più nulla, oppure lasciare inalterate le cifre di *a*, oppure inventare delle cifre qualsiasi).

Ad esempio, se *a* = 0,68422432763 possiamo scrivere:

b = 0,**7**
oppure: *b* = 0,6**9**422432763
oppure: *b* = 0,68**8** etc.

Possiamo comunque concludere che se vogliamo scrivere un numero maggiore di *a* (e minore di 1) dobbiamo scrivere un numero *b* in cui almeno una cifra decimale sia maggiore della corrispondente cifra decimale di *a*.

Prendiamo ora in considerazione il numero:

a = 0,99999999999...

dunque il numero periodico $0,\overline{9}$. Ebbene, se $0,\overline{9}$ fosse un numero minore di 1, dovrebbe essere possibile scrivere (applicando il **Procedimento** sopra descritto!) un numero minore di 1 e maggiore di *a*.

Ma non è possibile applicare il **Procedimento**: cioè non è possibile lasciare inalterate le cifre decimali di *a* 'fino ad un certo punto" e quindi "aumentare" una cifra decimale, perché tutte le cifre decimali dopo la virgola sono 9!

Concludiamo dunque che $0,\overline{9}$ non è un numero minore di 1.

Evidentemente quanto proposto nella scheda B, ancorché sostanzialmente corretto, deve essere considerato incompleto e formalmente debole (non viene ad esempio dimostrato che il "Procedimento" indicato è indispensabile per scrivere un numero decimale compreso tra il numero assegnato *a* e 1).

Una ricerca sperimentale è stata condotta con riferimento agli allievi di una classe quarta e di una classe quinta Liceo scientifico (allievi di 17-19 anni), per un totale di 50 allievi.

Agli allievi è stato innanzitutto domandato di optare tra le due possibilità:

$$0,\overline{9} = 1 \qquad \text{e} \qquad 0,\overline{9} < 1$$

Il 68% degli allievi ha affermato che $0,\overline{9} < 1$; solo il 20% ha indicato $0,\overline{9} = 1$ (il restante 12% non ha risposto).

Ciò conferma che (nonostante agli allievi sia stato proposto, nel programma di matematica delle scuole secondarie inferiori e del biennio delle scuole superiori, come ricavare la frazione generatrice di un numero periodico) l'accettazione del fatto che le due **diverse** scritture "$0,\overline{9}$" e "1" possano indicare uno **stesso** numero costituisce effettivamente una difficoltà per gli allievi, i quali sono abituati a considerare una (implicita) corrispondenza biunivoca tra i numeri e le rappresentazioni (decimali) di essi.

Abbiamo quindi voluto esaminare l'efficacia della dimostrazione "tradizionale" presentata nella scheda A e dell'argomentazione presentata nella scheda B. A ciascun allievo sono state proposte, in sequenza, la scheda A e la scheda B (in quest'ordine).

Dopo aver proposto agli allievi la scheda A, il ricercatore ha nuovamente chiesto ad essi di scegliere tra le due possibilità $0,\overline{9} = 1$ e $0,\overline{9} < 1$: il 44% degli allievi ha affermato che $0,\overline{9} < 1$; il 48% ha indicato $0,\overline{9} = 1$ (il restante 8% non ha risposto). Intervistati brevemente, alcuni allievi (il 28% del totale) hanno affermato che, nonostante la dimostrazione, $0,\overline{9}$ è solo "un'approssimazione" di 1.

Dopo avere proposto agli allievi anche la scheda B, è stata proposta per la terza volta ad essi la precedente domanda: il 22% degli allievi ha affermato che $0,\overline{9} < 1$; il 70% ha indicato $0,\overline{9} = 1$ (il restante 8% non ha risposto).

	$0,\overline{9} = 1$	$0,\overline{9} = 1$	non risp.
Prima di proporre le schede	68%	**20%**	12%
Dopo la scheda A	44%	**48%**	8%
Dopo le schede A e B	22%	**70%**	8%

Possiamo dunque rilevare che l'insieme dei procedimanti presentati (compreso, dunque, il procedimento presentato nella scheda B) ha potuto convincere alcuni allievi (il 22% del totale) che $0,\overline{9} = 1$, allievi che non erano stati convinti dalla sola dimostrazione "tradizionale" (presentata nella scheda A).

Questa semplice esperienza non vuole costituire la base sperimentale di una ricerca scientifica nel campo dell'epistemologia dell'apprendimento: il campione, ad esempio, è troppo ristretto per poter essere considerato pienamente significativo e la metodologia del test e delle interviste dovrebbe essere approfondita e debitamente esplicitata. Ma alcuni degli spunti emersi meritano un'attenta riflessione.

La dimostrazione è certamente una fase fondamentale dell'apprendimento della matematica; ma non bisogna dimenticare che non sempre essa è in grado di convincere pienamente l'allievo, di catturare la sua attenzione.

Emotivamente, l'allievo può restare in parte o del tutto insensibile ad una "tradizionale" dimostrazione, mentre può essere affettivamente coinvolto, in termini spesso decisivi, da un'argomentazione più vicina all'esperienza, ad una procedura (praticamente) ripetibile, sebbene, forse, meno "rigorosa" [11].

Ricordiamo un'osservazione di uno dei più importanti matematici contemporanei, Jacques Hadamard (1865-1963):

«Che un elemento affettivo sia parte di ogni scoperta o invenzione è sin troppo evidente, e molti pensatori vi hanno già insistito: è chiaro che nessuna scoperta o invenzione significativa può aver luogo senza la volontà di scoprire» (Hadamard, 1993).

A. Rogerson e M. Arora citano un'interessante annotazione di un non meglio precisato "collega giapponese":

«È importante fare ricerca matematica nella propria lingua, in quanto la ricerca coinvolge la persona intera, conoscenza e sentimenti, testa e cuore. Fare matematica in una lingua straniera è come impegnarsi in un incontro di pugilato tenendo una mano dietro la schiena» (citato in: Rogerson & Arora, 1995, p. 496).

Dunque il ruolo dell'aspetto affettivo si conferma fondamentale nell'apprendimento della matematica, particolarmente per quanto riguarda l'accettazione di fatti matematici (per l'allievo) sorprendenti, in aperto contrasto

[11] La questione del rigore (anche dal punto di vista linguistico) è molto delicata. U. Bottazzini evidenzia la storicità di tale aspetto della matematica: «Il rigore in matematica è anch'esso un concetto 'storico' e dunque in divenire… Appellarsi all'esigenza del rigore nello spiegare lo sviluppo della matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di nuovi *standard* di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica» (Bottazzini, 1981, p. 13). La questione è complessa e non può essere certo esaurita in poche battute; il lettore potrà consultare ad esempio: D'Amore, 1993; Maier, 1993a e 1993b; Zan, 1995; Pellerey & Orio, 1996.

con «alcuni preesistenti frammenti pre-matematici» (e proprio la presenza di tali 'frammenti" è una delle principali cause di misconcezioni: Davis & Vinner, 1986, pp. 298-300).

Concludiamo facendo nostra un'osservazione di F. Speranza, riferita primariamente al ruolo didattico della dimostrazione e dell'esperienza concreta in geometria (ma immediatamente estesa all'aritmetica ed all'algebra):

«Molti insegnanti di matematica sono convinti che attraverso le dimostrazioni gli studenti imparino sia i 'contenuti' sia la 'struttura logica' della disciplina, e siano educati allo 'spirito critico'. Almeno per la geometria, sono profondamente convinto che questa sia un'illusione. Anzitutto i 'fatti spaziali' si imparano per esperienza concreta (in certa misura, anche quella offerta dal metodo delle coordinate); del resto, anche altri settori, nei quali i fatti sono meno 'palpabili', come l'aritmetica e l'algebra, si apprendono anzitutto affrontando problemi, escogitando metodi di risoluzione» (Speranza, 1992, p. 136).

5.3. IL RUOLO DELLA VISUALIZZAZIONE

5.3.1. Non solo parole

Fino ad ora ci siamo occupati del ruolo dell'espressione linguistica nell'apprendimento e nell'insegnamento della matematica. Ma ciò non è sufficiente: frequentemente, infatti, l'espressione di un contenuto matematico (in ogni livello scolastico: D'Amore, 1995) non è affidata soltanto a parole o ad appositi simboli; spesso compaiono disegni, schemi, diagrammi, immagini (Bartolini Bussi, 1991).

Dedicheremo dunque la presente sezione ad un termine che viene impiegato in questioni di rilevante importanza, nella didattica della matematica; tale termine è: *visualizzazione*. Ricordiamo che nel primo paragrafo del capitolo 3 abbiamo già introdotto alcune questioni importanti a riguardo, con riferimento alla didattica del concetto di funzione, sottolineando il ruolo dei registri rappresentativi; ma è indispensabile riprenedere l'argomento con la necessaria ampiezza.

Presentiamo innanzitutto la questione citando alcuni Autori che, recentemente, hanno dedicato studi e ricerche a questo argomento.

La rappresentazione di un oggetto matematico può non essere semplice, in quanto, come nota R. Duval, «gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione... come sono gli oggetti comunemente detti 'reali' o 'fisici'»; da ciò segue che «le diverse rappresentazioni semiotiche di un oggetto matematico sono assolutamente necessarie». È tuttavia necessario essere prudenti nel ricorso alle varie forme di rappresentazione tra le quali la rappresentazione visuale (Duval, 1993, pp. 37 e 38). Seguiamo ancora Duval, il quale osserva che la varietà dei possibili registri rappresentativi è non solo utile per l'apprendimento, ma si rivela addirittura indispensabile (e inevitabile):

«Il funzionamento cognitivo del pensiero umano si rivela inseparabile dall'esistenza di una diversità di registri semiotici di rappresentazione. Se chiamiamo *sémiosis* l'apprendimento o la produzione di una rappresentazione semiotica e *noésis* l'apprendimento concettuale di un oggetto, dobbiamo affermare che la *sémiosis* è inseparabile dalla *noésis*» (Duval, 1993, pp. 39-40).

Dunque tra le possibili rappresentazioni di un oggetto matematico, le rappresentazioni grafiche sono importanti nella didattica della matematica, «sono delle rappresentazioni semiotiche allo stesso titolo di quanto lo siano le figure geometriche, la scrittura algebrica o la lingua». Ma dobbiamo moderare l'entusiasmo: se, da un lato, è innegabile che la rappresentazione visuale sia certamente utile per esprimere (e quindi per essere in grado di apprendere) un contenuto matematico, è altrettanto vero che l'apprendimento mediante tali rappresentazioni «esige un particolare lavoro»; pertanto «non è più possibile affidarsi per la loro utilizzazione all'interpretazione spontanea di figure e di immagini» (Duval, 1994b).

Prudenza, quindi, attenzione continua. E prudenza viene anche raccomandata in un importante studio di E. Fischbein dedicato specificamente alla rappresentazione visuale di oggetti matematici ed alla sua importanza nella didattica della matematica (Fischbein, 1993): illustrando la "teoria dei concetti figurali", Fischbein sottolinea:

«L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali, non è un processo naturale. Essa dovrebbe costituire una continua, sistematica, principale attività del docente» (Fischbein, 1993, p. 156).

Seguendo Fischbein, indichiamo con il termine "concetto figurale" quella (indispensabile) «fusione tra concetto e figura» (Fischbein, 1993, p. 143) che porta alla formazione ed all'apprendimento del contenuto matematico in questione. Ebbene, «il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non può essere considerato un effetto spontaneo dei tradizionali corsi di geometria» (Fischbein, 1993, p. 156). In parole povere, in geometria (ma non soltanto in geometria: analoghe considerazioni valgono per tutti i settori della matematica, ed anche in diversi àmbiti disciplinari), non basta proporre una figura a completamento di una spiegazione e sperare che, interpretando spontaneamente tale immagine, i nostri allievi arrivino a "capire". C'è bisogno di molta attenzione, dell'oculata valutazione di tutti gli aspetti coinvolti nell'accostamento delle diverse forme di rappresentazione.

La visualizzazione è molto importante per la didattica della matematica nella scuola secondaria superiore (sul concetto di funzione si veda ad esempio: Vinner, 1992). Nei prossimi paragrafi esamineremo, in particolare, due argomenti di basilare interesse.

5.3.2. Visualizzazione e algebra elementare

Spesso, nella scuola primaria, nella scuola secondaria inferiore e nel primo anno della scuola secondaria superiore, gli allievi tendono a suddividere la matematica in aritmetica-algebra, da un lato, e geometria, dall'altro. Una delle differenze didattiche, in fondo, è da far risalire proprio al diverso peso della visualizzazione: l'aritmetica e la geometria "si fanno" con i numeri (o, tutt'al più, con alcune speciali combinazioni di lettere e numeri); nella geometria, invece, si ha a che fare con figure.

Inizieremo con la presentazione dei risultati di uno studio (1994-1995) di M. Kaldrimidou riguardante la visualizzazione di alcuni procedimenti algebrici elementari (Kaldrimidou, 1995), mediante il quale la ricercatrice greca ha evidenziato alcuni atteggiamenti di allievi e di insegnanti di matematica nei confronti della visualizzazione (o almeno dell'uso di alcuni registri visuali: Radford, 2002)[12].

In uno dei quesiti proposti nel test di M. Kaldrimidou viene fatto riferimento ad una ben nota proposizione dell'algebra geometrica euclidea (Euclide, 1970, p. 163) che consente di visualizzare uno dei più celebri "prodotti notevoli".

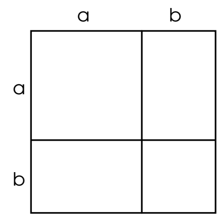
Il quesito è il seguente:

1.
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ba+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$$

---

[12] La necessità di un approfondimento delle modalità di impiego delle tecniche di visualizzazione è riconosciuto dalla stessa ricercatrice: in un precedente lavoro, M. Kaldrimidou osservava infatti: «Abbiamo potuto constatare presso gli studenti un'assenza di riflessione sistematica sulla matematica e sui modi di acquisirla, accompagnata da concezioni stereotipate… Le immagini mentali, le questioni del loro legame reciproco e… le strategie utilizzate, …meritano, a nostro avviso, di essere approfondite» (Kaldrimidou, 1987, pp. 156 - 157).

2.



Tra i due metodi per provare che: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, qual è il più appropriato, dal punto di vista matematico? Giustificate la risposta.

I risultati rivelano una qualche diffidenza da parte degli studenti e degli insegnanti in Grecia nei confronti della rappresentazione visuale, scelta rispettivamente dal 27% e dal 23%: il 68% degli studenti e il 61% degli insegnanti ha invece preferito la rappresentazione analitica (gli altri non esprimono alcuna preferenza).

Queste scelte sono motivate da valutazioni piuttosto chiare ed evidenti. Coloro i quali hanno optato per la risoluzione analitica ritengono che la rappresentazione visuale non sia un mezzo sempre adatto per rappresentare informazioni in matematica; ciò dipende dalla specificità, dalla particolarità di ogni rappresentazione visuale; inoltre, negli insegnanti sono spesso presenti ostacoli di natura epistemologica ("Si cerca di ottenere metodi generali, si richiede esattezza, si cerca di avere delle teorie complete… E basta talvolta il carattere algebrico del metodo affinché la soluzione sia considerata più matematica": Kaldrimidou, 1995). Molto interessanti, infine, sono alcune motivazioni espresse dagli studenti: da esse emerge che alcune clausole del contratto didattico attribuiscono notevole importanza all'espressione algebrica, talvolta anche a scapito di quella figurale.

Obietterà qualcuno: tutto questo accade in Grecia, ma che cosa possiamo dire a proposito della nostra scuola superiore? Abbiamo dunque proposto lo stesso test a studenti di alcune scuole superiori italiane e abbiamo ottenuto risultati sostanzialmente in linea con quelli sopra presentati: il 60% degli allievi ha optato per la rappresentazione analitica, meno della metà (il 29%) per quella visuale.

Diversi allievi hanno giustificato la propria scelta fornendo motivazioni interessanti (Bagni, 1997).

Alcuni studenti che hanno scelto la rappresentazione analitica, ad esempio, hanno sottolineato positivamente la presenza di tutti i passaggi del procedimento, in forma esplicita: ciò sembra rendere il metodo convincente e molto affidabile, mentre l'incertezza relativa alla misura dei segmenti è spesso motivo di perplessità. Se da un lato è chiara la differenza tra la considerazione dei reali *a*, *b* in ambito algebrico e come misure di segmenti, d'altro canto è quasi impossibile non riferirsi ancora ad alcune clausole del contratto didattico (chissà quante volte l'insegnante avrà vivamente raccomandato di "non saltare i passaggi"!)

Ma c'è di più: altri studenti, sempre tra coloro i quali hanno optato per la rappresentazione analitica, hanno ritenuto che *la natura algebrica del problema suggerisse o addirittura imponesse una risoluzione di tipo algebrico*: «per dimostrare un'espressione algebrica è meglio usare un procedimento algebrico», afferma sicuro un allievo. Ciò è davvero molto interessante, sia per un possibile ulteriore riferimento a clausole del contratto didattico, sia in quanto esprime con straordinaria evidenza l'ostacolo costituito da una rappresentazione eterogenea rispetto alla richiesta formulata nel testo di un esercizio: gli "addetti ai lavori" sanno bene che i due linguaggi (quello algebrico e quello geometrico) sono "isomorfi", ma il riconoscimento della loro sostanziale equivalenza può costituire un serio ostacolo per l'allievo [13].

Le conclusioni sono immediate: la visualizzazione dei procedimenti algebrici elementari *non* gode, in generale, di un'altissima reputazione tra gli allievi della scuola secondaria superiore (e tra i loro insegnanti), almeno nella forma considerata nel test sopra ricordato; ciò dipende da diversi fattori, spesso riconducibili ad alcune clausole del contratto didattico. Molti studenti sono portati a ritenere più affidabile, più completa, dunque più "matematica" la rappresentazione analitica[14].

5.3.3. Visualizzazione e funzioni

Abbiamo dunque constatato che una qualche perplessità, addirittura una forma di larvata diffidenza è associata ad alcune rappresentazioni visuali, all'inizio della scuola secondaria superiore.

Ma sarebbe improprio estendere questa situazione a *tutti* i procedimenti collegati alla visualizzazione (e la nostra esperienza di insegnanti ci assicura che tali procedimenti sono davvero molti!): ad esempio, la didattica delle funzioni è saldamente basata sulle tecniche di visualizzazione, un legame che, come vedremo, talvolta giunge addirittura a identificare lo studio di una funzione con il tracciamento del suo diagramma cartesiano. E tale pratica ha molte importanti conseguenze didattiche (Vinner, 1992).

Esaminiamo infatti i risultati di altre ricerche nell'ambito dello studio presentato nel paragrafo precedente. Ad alcuni

---

[13] Altri studenti hanno apertamente sottolineato la difficoltà della risoluzione visuale, non comune nella pratica didattica, ed il conseguente timore collegato alla sua utilizzazione (per approfondire il ruolo della figura nella prassi didattica si veda ad esempio: D'Amore, 1995).

[14] Nessuno degli allievi intervistati, ad esempio, ha osservato che l'errore che vede $(a+b)^2$ identificato in a^2+b^2 (omettendo il cosiddetto "doppio prodotto") viene ad essere quasi impossibile se si tiene presente la rappresentazione visuale, mentre può non essere infrequente se la risoluzione è ridotta alla mnemonica applicazione della formula $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

studenti di III e di V liceo scientifico è stato proposto il seguente test:

Sono assegnate le seguenti relazioni tra numeri reali; per ciascuna di esse disegnare (se possibile) il grafico cartesiano e dire, giustificando la risposta, se si tratta di una funzione: 1) R_1 è la relazione tra numeri reali che ad ogni x reale associa il reale $2x$. 2) R_2 è la relazione tra numeri reali che ad ogni $x$reale associa il reale 1. 3) R_3 è la relazione tra numeri reali che: - se x *è razionale*, allora a x associa 0; - se x *è irrazionale*, allora a x associa 1. 4) R_4 è la relazione tra numeri reali che: - se il reale x *è razionale*, con $x = m/n$, m intero, n intero positivo, in modo che m/n sia ridotta ai minimi termini, allora a x associa $1/n$; - se x *è irrazionale*, allora a x associa 0.

Osserviamo che dopo le funzioni R_1 e R_2, il cui diagramma cartesiano è una semplice e rassicurante retta, la funzione R_3 e la funzione R_4 hanno grafici il cui disegno risulta difficoltoso (o impossibile).

La R_3 è la *funzione di Dirichlet*, introdotta, per ogni x reale, come la funzione caratteristica dell'insieme dei reali irrazionali[15].

La funzione di Dirichlet è discontinua per ogni x reale (la dimostrazione è semplice e può essere proposta a livello di

---

[15] Alcuni Autori (Prodi, 1970, p. 308) preferiscono definire tale funzione nel solo intervallo [0; 1], o riferirne la definizione alla funzione caratteristica dell'insieme dei reali razionali; la valenza didattica dell'esempio, tuttavia, resta immutata. Si veda inoltre: Bagni, 1993b, p. 468.

scuola secondaria: Bagni, 1994). Ma una valutazione intuitiva della discontinuità della funzione di Dirichlet non è direttamente ricollegabile all'esame del suo diagramma cartesiano: il grafico di tale funzione, a causa delle "frequentissime" discontinuità, non può essere disegnato (se non per un numero finito di punti; esso potrebbe essere immaginato come un "fittissimo susseguirsi di punti", sull'asse delle x e sulla retta di equazione $y = 1$).

Chiameremo infine la R_4 *funzione di Gelbaum* (Gelbaum, 1961, p. 124; Gelbaum & Olmsted, 1979, pp. 34-35; è ben definita: infatti se x è un razionale, con $x = m/n$, m intero, n intero positivo, in modo che m/n sia ridotta ai minimi termini, allora gli interi m, n sono univocamente determinati: Gelbaum, 1962, p. 53). Lo studio di quest'ultima funzione elude ogni interpretazione basata sull'esame del diagramma: è impossibile visualizzare con qualche precisione l'andamento del grafico di una funzione come questa; non può neppure essere immaginata un'approssimata rappresentazione come quella della funzione di Dirichlet[16].

Ecco i risultati dei test, suddivisi per le due classi:

Classe III

	Disegnano corrett. il grafico	Risp. che si tratta di funzione	Risp. che *non* si tratta di funzione	Non risp.
A1	69 (92%)	71 (95%)	1 (1%)	3 (4%)
A2	61 (81%)	54 (72%)	19 (25%)	2 (3%)
A3	0 (0%)	34 (46%)	31 (41%)	10 (13%)
A4	0 (0%)	21 (28%)	40 (53%)	14 (19%)

[16] La funzione di Gelbaum è continua per ogni x reale irrazionale e discontinua per ogni x reale razionale (la dimostrazione è più impegnativa della dimostrazione della discontinuità della funzione di Dirichlet; una traccia di tale dimostrazione che può essere affrontata dagli allievi della scuola superiore è in: Bagni, 1994, pp. 30-31): anche la verifica di queste caratteristiche *non* può essere collegata all'esame del diagramma.

Classe V

	Disegnano corrett. il grafico	Risp. che si tratta di funzione	Risp. che *non* si tratta di funzione	Non risp.
A1	66 (100%)	65 (98%)	0 (0%)	1 (2%)
A2	65 (98%)	58 (88%)	5 (7%)	3 (5%)
A3	0 (0%)	39 (59%)	18 (27%)	9 (14%)
A4	0 (0%)	19 (29%)	22 (33%)	25 (38%)

Per quanto riguarda la situazione nella III classe, le incertezze relative ai quesiti 3 e 4 sono spesso collegate alla difficoltà (o all'impossibilità) di tracciare il diagramma cartesiano: alcuni allievi hanno espresso disagio nei confronti di esempi di relazioni inusuali nella pratica didattica (ed hanno affermato: «Non ho capito l'esercizio» oppure: «Non avevo mai incontrato una funzione del genere, non sapevo neanche se era possibile farla»); ma la netta maggioranza di coloro i quali hanno negato alle funzioni di Dirichlet e di Gelbaum la qualifica di funzione ha evidenziato l'impossibilità di tracciare il loro grafico: questa giustificazione è presente nelle risposte di ben 19 studenti tra i 31 che non hanno considerato una funzione la funzione di Dirichlet e di 22 studenti (si tratta spesso degli stessi) tra i 40 che non hanno considerato una funzione la funzione di Gelbaum.

Dunque il concetto di funzione appare frequentemente collegato al diagramma cartesiano della relazione esaminata; negli allievi, questa stretta connessione è spesso preponderante sulla stessa valutazione delle caratteristiche proprie di una funzione, viene addirittura a determinare la discriminante principale che consente di accettare una relazione come una funzione.

Tutto ciò, si potrà dire, accade in III, quando i ragazzi sono ancora inesperti; ma come cambia la situazione con allievi meno giovani? Esaminiamo la situazione nella V classe (allievi di 18-19 anni). La situazione *non* è poi così diversa: le funzioni di Dirichlet e di Gelbaum sono state infatti riconosciute come funzioni rispettivamente dal 59% (in III la percentuale era del 46%) e dal 29% (in III la percentuale era del 28%) degli studenti di V. Una notevole percentuale di allievi di V ha ancora tentato un'interpretazione di tali funzioni con riferimento ai loro diagrammi cartesiani: ben 15 studenti tra i 18 che non hanno considerato una funzione la funzione di Dirichlet e 16 studenti (spesso gli stessi) tra i 22 che non hanno considerato una funzione la funzione di Gelbaum hanno sottolineato l'impossibilità di tracciare i rispettivi grafici. Uno studente ha affermato: «Il grafico della quarta relazione non esiste, dunque non ho potuto applicare la regola secondo la quale una funzione ha un grafico che può essere intersecato in un solo punto da una retta verticale. Il professore ci ha insegnato a fare sempre questo controllo». Chiaro, no?

Evidentemente la pratica didattica tradizionale, incentrata sulla visualizzazione di una funzione mediante il suo diagramma cartesiano, non sembra agevolare l'affrancamento dell'allievo da tale consuetudine: essa, non lo dimentichiamo, è didatticamente molto importante, ma *non* deve essere considerata concettualmente esclusiva. L'allievo sembra identificare completamente una corrispondenza con la sua visualizzazione nel piano cartesiano e ciò non contribuisce di certo ad eliminare le difficoltà collegate alla considerazione di funzioni "non disegnabili" (eppure teoricamente importanti) come quelle di Dirichlet e di Gelbaum. Torna alla mente il monito di Duval, citato poco sopra:

«È l'oggetto rappresentato che importa, e non le sue diverse rappresentazioni semiotiche possibili... La distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è dunque un punto strategico per la comprensione della matematica» (Duval, 1993, pp. 37 e 38).

5.3.4. La visualizzazione come punto di partenza

La situazione ora rilevata sperimentalmente impone qualche riflessione di carattere generale.

Riassumiamo i dati in nostro possesso: il ruolo della visualizzazione, analizzato con riferimento a due diversi momenti del curriculum matematico della scuola secondaria superiore, appare decisamente differente: nel caso dei procedimenti algebrici elementari, la visualizzazione è guardata con qualche perplessità; non pare che gli allievi e gli insegnanti attribuiscano ai metodi visuali grande o primaria importanza, particolare affidabilità. Lo stesso contratto didattico, attraverso alcune clausole, sembra limitare il ruolo (e, conseguentemente, l'impiego) della visualizzazione. Se tuttavia ci spostiamo al concetto di funzione, e dunque ad un argomento di fondamentale importanza del curriculum matematico della scuola secondaria superiore (talvolta considerato addirittura come *il* tipo di esercizio nel quale convergono i contenuti, le abilità e gli obiettivi di larga parte del programma di matematica), troviamo una situazione assai diversa, pressoché opposta. La visualizzazione diventa il registro rappresentativo fondamentale. La funzione si materializza nel proprio grafico, nel diagramma cartesiano: si identifica completamente con esso.

Che cosa è accaduto, dunque?

Certamente la risposta dovrebbe essere lunga e articolata: non esiste una singola causa che determina questa netta 'inversione di tendenza". Motivi di tradizione nell'insegnamento si accompagnano all'azione delle clausole del contratto didattico ed a chissà quante altre ragioni.

Se però osserviamo globalmente la situazione, notiamo che la realizzazione di un modello visuale di un concetto o di un procedimento matematico sembra essere il *punto di arrivo* del percorso di apprendimento proposto all'allievo nella scuola secondaria superiore; e ciò può essere causa di inconvenienti notevoli, quali le incertezze provocate dall'esame di corrispondenze come la funzione di Dirichlet e la funzione di Gelbaum[17].

Qualcosa, pertanto, non funziona: e ciò perché la visualizzazione potrebbe (e dovrebbe) essere invece considerata come un versatile, prezioso *punto di partenza*, come un *compagno di strada*, nel rispetto dell'auspicabile varietà dei registri rappresentativi, per l'apprendimento graduale ed efficace degli "oggetti matematici" (Paivio, 1986; Schoenfeld, 1986; Duval, 1994a e 1994b): un elemento essenziale, dunque, di quella delicata (ma, crediamo, ineludibile) fase dell'apprendimento propedeutica rispetto all'astrazione che caratterizza la matematica (torna alla mente la *trasposizione didattica*, presentata nel capitolo 2: Chevallard, 1985).

In poche parole: sappiamo che la matematica, da molti punti di vista, è un percorso che porta dal concreto all'astratto. Ebbene, la visualizzazione di un concetto matematico è un passo (spesso didatticamente decisivo per l'apprendimento) che consente di rendere concreto, visibile (quasi "tangibile") un concetto astratto. Pertanto può essere opportuno, se non addirittura necessario, partire proprio dall'impiego di tecniche di visualizzazione per giungere alla piena e definitiva comprensione di quel concetto e dunque

---

[17] Ricordiamo inoltre che l'identificazione di una funzione con la sua rappresentazione visuale nel piano cartesiano porta ad una drastica limitazione delle relazioni che possono essere considerate: ad esempio, l'allievo potrebbe incontrare notevoli difficoltà a trattare corrispondenze diverse dalle (usuali, ma non uniche!) funzioni reali di variabile reale.

al corretto apprendimento di un contenuto matematico astratto[18].

5.3.5. La scelta del contesto

In ciò che esporremo in questo paragrafo confluiranno molte riflessioni espresse precedentemente in altre parti di questo lavoro. In particolare, ci occuperemo, direttamente o indirettamente, di immagini mentali, di modelli mentali e di modelli esterni (il lettore ricorderà il capitolo 3), nonché di contratto didattico (al quale abbiamo dedicato l'intero capitolo 4).

Resteremo, però, sempre in un ambito collegato alla visualizzazione (ci riferiremo alla ricerca: Bagni, 1998).

La nostra riflessione sarà dedicata alla scelta del contesto interpretativo, da parte dell'allievo, per un'espressione assegnata. Ci occuperemo dunque del rilevamento dei modelli esterni suscitati da espressioni elementari, la cui interpretazione, come vedremo, sarà influenzata anche da alcune clausole del contratto didattico.

Ciò significa che nella ricerca qui ricordata non sarà condotta un'indagine sui differenti modelli esterni relativi ad un (singolo) concetto: sceglieremo un'espressione (in questo caso considereremo alcune equazioni algebriche) e cercheremo di capire a quale modello essa viene associata dall'allievo, ovvero in quale contesto essa viene interpretata (Kaldrimidou, 1987; D'Amore, 1993a e 1995).

In particolare, ci occuperemo delle interpretazioni di alcune semplici espressioni, come ad esempio: "$ax+by+c$ =

---

[18] Per quanto riguarda il ruolo della visualizzazione nella comprensione del concetto di limite, ad esempio, il lettore è invitato ad esaminare l'ultima parte della ricerca sull'infinitesimo presentata, in parte, nel capitolo 3. Si riscontra la presenza di difficoltà nell'identificazione di una concezione teorica del limite e della corrispondente situazione geometrica, nel piano cartesiano; si potrebbero insomma rilevare problemi di settorializzazione nell'apprendimento (Schoenfeld, 1986). Importante è poi il ruolo della visualizzazione nell'evidenziare l'opzione per l'infinitesimo potenziale (alcuni allievi giungono al rifiuto di stabilire un limite nel caso di una funzione costante, per la quale è dunque impossibile rilevare il "progressivo avvicinarsi" al valore del limite delle ordinate dei punti del grafico della funzione considerata).

0”. La scelta di collocare tale espressione in un contesto geometrico (evocando, ad esempio, modelli del concetto di “retta” nell’ambito della geometria analitica) oppure in un contesto algebrico (parlando di “equazione di primo grado” o, impropriamente, di “polinomio”) ha motivazioni interessanti e conseguenze didattiche rilevanti (Webb, 1979; Schoenfeld, 1986; Duval 1994a).

L’analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando due classi di III liceo scientifico (24 e 27 allievi) ed una classe di IV liceo scientifico (26 allievi), per un totale di 77 allievi (in particolare, le due classi di III sono state suddivise in quattro gruppi di 12, 12, 13, 14 allievi, la classe di IV in due gruppi di 13 allievi ciascuno). Tutti gli studenti conoscevano gli elementi di geometria analitica relativamente alla retta ed alla circonferenza. In particolare, le equazioni cartesiane della retta e della circonferenza erano state date (sia dall’insegnante, sia nel libro di testo in uso nelle classi) nelle forme generali:

$$ax+by+c = 0$$
$$y = mx+q$$
$$x^2+y^2+ax+by+c = 0$$

Gli allievi della classe IV conoscevano i primi elementi di goniometria, ed in particolare la lettura delle funzioni goniometriche di un angolo fissato con riferimento alla cosiddetta “circonferenza goniometrica” (la circonferenza, nel piano cartesiano, di raggio unitario e con il centro coincidente con l’origine degli assi).

A ciascun gruppo è stato proposto un test così strutturato:

Che cos’è?
[espressione/i da interpretare, diversa/e per ogni test]
Risposta: ____________________________

dove le espressioni da interpretare erano le seguenti:

- primo gruppo	(cl. III)		$ax+by+c = 0$
- secondo gruppo	(cl. III)		$hx+ty+g = 0$
- terzo gruppo	(cl. III)	(a)	$y = mx+q$
		(b)	$hx+ty = u$
- quarto gruppo	(cl. III)	(a)	$hx+ty+g = 0$
		(b)	$y = wx+d$
- quinto gruppo	(cl. IV)	(a)	$y = mx+q$
		(b)	$ax+by+c = 0$
		(c)	$y = mx$
		(d)	$x^2+y^2+ax+by+c = 0$
		(e)	$x^2+y^2 = 1$
- sesto gruppo	(cl. IV)		$x^2+y^2+nx+sy+p = 0$

Nel caso in cui le espressioni date fossero più di una (test C, D, E), erano state indicate più righe per la risposta, tante quante le espressioni da interpretare.

Risultati del primo gruppo (classe III):

$ax+by+c = 0$	allievi	(totale: 12 allievi)
- una retta	7	59%
- equazione di retta	4	33%
- un'equazione di I grado	1	8%

Notiamo innanzitutto che tutti gli studenti hanno dato una singola risposta: la presenza della (unica) riga ha evidentemente indotto gli allievi a interpretare come coercitiva l'implicita raccomandazione di dare un'uni ca risposta (questa stessa osservazione può valere per tutti i test che commenteremo).

La quasi totalità degli allievi (globalmente il 92%) ha interpretato l'espressione data nell'ambito della geometria analitica. Si osservi che la forma dell'equazione pro posta coincide esattamente (anche per quanto riguarda le lettere impiegate) con quella indicata nel libro di testo e nella spiegazione in classe e ciò può aver contribuito ad orientare in tale modo la scelta degli studenti[19].

Risultati del secondo gruppo (classe III):

$hx+ty+g=0$	allievi	(totale: 12 allievi)
- una retta	5	42%
- equazione di rett	2	17%
- un'equazione di I grado	4	33%
- un polinomio	1	8%

I risultati sembrano confermare solo in parte le tendenze espresse nel test precedente. Quantitativamente, infatti, appare una sensibile differenza: gli studenti che fanno riferimento all'ambito della geometria analitica sono, stavolta, il 59%, e tale risultato conferma solo in parte l'adesione plebiscitaria (92%) del test precedente.

Dalle interviste agli allievi, che hanno seguìto ogni test, traiamo alcune spiegazioni interessanti:

«Potrebbe trattarsi di una retta, ma le lettere *h*, *t*, *g* non sono quelle che compaiono nella solita equazione della retta. Questo mi ha fatto pensare che l'equazione può non essere intesa come una retta» (Linda).

«Ho pensato che quelle strane lettere potessero voler dire che non si trattava di una retta, come viene subito in mente, ma di qualcosa si diverso. Insomma, una specie di suggerimento di chi ha preparato l'esercizio» (Antonio).

Una scelta delle lettere diversa da quella usuale ha dunque portato alcuni allievi a modificare il contesto in cui l'espressione algebrica data è stata interpretata. Tale fenomeno induce a ritenere confermata l'ipotesi precedentemente espressa, ovvero che l'esatta coincidenza

---

[19] Bisogna ovviamente considerare anche la quotidiana consuetudine che gli allievi hanno maturato con il piano cartesiano: lo svolgimento di problemi e di esercizi di geometria analitica è un'attività frequente ed importante per gli studenti della III classe del liceo scientifico.

dell'espressione assegnata con una delle equazioni cartesiane della retta (nella forma generale presentata sia nella spiegazione dell'insegnante, sia nel libro di testo) può orientare l'interpretazione dell'equazione in questione verso l'ambito della geometria analitica.

La giustificazione di Antonio riflette la volontà dello studente di interpretare con moltissima cura la richiesta dell'insegnante, anche sulla base dei dettagli: in ciò notiamo una notevole (eccessiva) rilevanza attribuita anche ai minimi particolari (in questo caso insignificanti, come la scelta delle lettere), che potrebbe essere collegata a qualche clausola del contratto didattico.

Risultati del terzo gruppo (classe III):

(a) $y = mx+q$	allievi	(totale: 13 allievi)
- una retta	9	69%
- equazione di retta	3	23%
- una funzione	1	8%

(b) $hx+ty = u$	allievi	(totale: 13 allievi)
- una retta	6	46%
- equazione di retta	3	23%
- un'equazione di I grado	3	23%
- un'equazione di II grado	1	8%[20]

I risultati del test sembrano confermare quelli dei due test precedenti. L'equazione esattamente coincidente con quella usualmente impiegata per indicare una retta nel piano cartesiano (punto a) viene direttamente collegata al concetto di retta; per il punto (b), il 69% degli allievi fa ancora riferimento all'interpretazione cartesiana.

Tra le giustificazioni espresse nel corso delle interviste ricordiamo:

[20] La risposta che fa riferimento ad un'«equazione di secondo grado» è frutto di un errore, subito riconosciuto dall'allievo.

«Non ero sicuro della mia risposta al punto (b): mi sarei aspettato l'equazione $ax+by+c = 0$; in quella del test, inoltre, la u al secondo membro diventerebbe $-u$ nel primo. Ma ho pensato che questo non ha importanza ed ho scritto che anche la seconda equazione rappresenta una retta» (Mario).

«Ho pensato che un'equazione che incomincia con "$y =$" è sempre una funzione, perché quando pongo una x ottengo un'unica y» (Chiara).

Interessante è la citazione del concetto di funzione (Vinner, 1992): sembra che la verifica della caratteristica fondamentale della definizione di funzione sia considerata elemento di primaria importanza dallo studente; ciò potrebbe riflettere un'analoga importanza attribuita a ciò da parte dell'insegnante.

Risultati del quarto gruppo (classe III):

(a) $hx+ty+g =$	allievi	(totale: 14 allievi)
- una retta	5	36%
- equazione di retta	7	50%
- un'equazione di I grado	2	14%

(b) $y = wx+d$	allievi	(totale: 14 allievi)
- una retta	5	36%
- equazione di retta	7	50%
- un'equazione di I grado	2	14%

Attenzione: questo test ricalca solo apparentemente il precedente. Mentre infatti nel test C le due equazioni proposte erano disomogenee in quanto alla scelta delle lettere in esse contenute (con ciò intendendo che la prima presentava una scelta usuale, mentre la seconda una scelta insolita), nel presente test *entrambe* le equazioni sono scritte con lettere non usuali. Questa "coerenza" ha forse fatto sì che l'86% degli allievi abbia ugualmente individuato come spontanea l'interpretazione nell'ambito della geometria analitica.

Risultati del quinto gruppo (classe IV):

(a) $y = mx+q$	allievi	(totale: 13 allievi)
- una retta	5	38%
- equazione di retta	8	62%

(b) $ax+by+c = 0$	allievi	(totale: 13 allievi)
- una retta	5	38%
- equazione di retta	7	54%
- un'equazione di I grado	1	8%

(c) $y = mx$	allievi	(totale: 13 allievi)
- una retta (per l'origine)	6	46%
- eq.ne di retta (per l'orig .)	6	46%
- proporzionalità diretta	1	8%

(d) $x^2+y^2+ax+by+c = 0$	allievi	(totale: 13 allievi)
- una circonferenz	5	38%
- l'eq . di una circonferenza	6	46%
- un'equazione di II grado	1	8%
- nessuna risposta	1	8%

(e) $x^2+y^2 = 1$	allievi	(totale: 13 allievi)
- una circonferenza	3	23%
- l'eq . di una circonferenza	2	15%
- un cerchio	1	8%
- circonf. goniometrica	7	54%

Nei risultati del presente test ritroviamo alcune indicazioni emerse precedentemente. L'insieme di cinque equazioni identiche a quelle utilizzate per introdurre le rette e le circonferenze nel piano cartesiano non lascia dubbi alla maggior parte degli allievi su quale sia il contesto nel quale interpretare le espressioni.

Sottolineiamo una interessante giustificazione data, nel corso delle interviste, dall'allieva che ha interpretato l'equazione $x^2+y^2 = 1$ come un «cerchio»:

«Ho sbagliato perché ho subito pensato alla circonferenza col centro nell'origine. Mi sono immaginata il disegno di quel cerchio ed ho scritto: "cerchio". Non ho pensato che c'era solo il bordo» (Silvia).

Dunque Silvia scrive «circonferenza» con riferimento a $x^2+y^2+ax+by+c = 0$ e «cerchio» con riferimento a $x^2+y^2 = 1$. Dalla sua giustificazione emerge che proprio l'avere mentalmente visualizzato una ben determinata figura (la circonferenza di centro l'origine e di raggio unitario) ha provocato l'adesione ad una (errata) denominazione, appunto «cerchio»; adesione che *non* si è invece verificata nel caso dell'equazione $x^2+y^2+ax+by+c = 0$, che non identifica una singola (e dunque immaginabile) figura.

Risultati del sesto gruppo (classe IV):

$x^2+y^2+nx+sy+p = 0$	allievi	(totale: 13 allievi)
- una circonferenza	4	31%
- l'eq . di una circonferenza	8	61%
- nessuna risposta	1	8%

La variazione delle lettere (dalle solite *a*, *b*, *c* alle inusuali *n*, *s*, *p*) non causa, nel caso ora esaminato, alcuno spostamento apprezzabile dell'interpretazione dall'ambito della geometria analitica. Questi risultati non sembrano quindi riflettere quelli del test del secondo gruppo, in cui, con riferimento all'equazione della retta, una scelta delle lettere diversa da quella usuale ha portato alcuni allievi a modificare il contesto in cui l'espressione data era stata interpretata.

Più in generale, osserviamo innanzitutto che i test sopra illustrati sono riferiti ad un campione piuttosto esiguo di studenti (e potrebbero dunque essere verificati in senso ben più generale. L'operazione è, nella pratica, abbastanza semplice: perché non provare?); tuttavia esprimono alcune tendenze abbastanza chiare.

Dai risultati dei sei test emerge che (almeno per la geometria analitica) la prima interpretazione degli allievi è spesso riferita alla visualizzazione[21].

Rileviamo inoltre che il contesto nel quale viene recepita o interpretata un'espressione matematica non è scelto sulla base, ad esempio, del criterio della massima generalità: da questo punto di vista, ad esempio, un'equazione di primo grado in due incognite dovrebbe essere interpretata proprio come un'equazione di primo grado in due incognite, né più né meno; una sua interpretazione analitica potrebbe essere considerata come un'ulteriore particolarizzazione. La generalità, al contrario, è minimizzata: l'allievo sembra propendere proprio per l'interpretazione più particolare[22], nella speranza, forse, di assecondare l'intenzione dell'insegnante, di sfruttare ogni suo (implicito) suggerimento (Webb, 1979).

In questa fase possiamo rilevare l'azione del contratto didattico: da un lato, infatti, il comportamento dell'al lievo è influenzato dall'abitudine ad occuparsi di esercizi di geometria analitica (e si tratta di un'abitudine inevitabile, nelle classi III e IV della scuola secondaria superiore!); ma l'importanza attribuita (anche coscientemente) alla scelta delle lettere nella scrittura dell'equazione può collegarsi al contratto didattico, e in particolare a quelle clausole che prevedono la "ripetizione delle modalità" (D'Amore, 1993a; D'Amore & Frabboni, 1996).

---

[21] Ricordiamo ancora l'osservazione di E. Fischbein secondo la quale «l'integrazione dell e proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali, non è un processo naturale» (Fischbein, 1993, p. 156). Questa «predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali», nella situazione esaminata, sembra lontana: le equazioni da noi proposte nei test sono utilizzate dagli allievi quasi esclusivamente in modelli esterni espressi in termini visuali.

[22] Potremmo dire che l'allievo finisce per considerare la *generalità* come *genericità*, dunque in termini negativi, da evitare.

Concludiamo questo lungo paragrafo osservando che le possibilità didattiche collegate ad un corretto controllo dei registri rappresentativi sono molte (citiamo: Paivio, 1986; Duval, 1993, 1994a e 1994b): una gestione attenta dell'impiego dei diversi registri rappresentativi può risultare di grande importanza in molti settori della didattica della matematica[23], e può evitare la formazione di pericolosi ostacoli.

5.4. QUASI UNA CONCLUSIONE…

Al termine di questo capitolo una questione si presenterà spontaneamente all'attenzione del lettore: abbiamo constatato la possibile presenza di molti ostacoli che rendono difficoltoso (ed a volte, purtroppo, gravemente!) l'apprendimento; ebbene, alla luce di ciò, quale può essere il corretto atteggiamento di noi insegnanti? Come possiamo effettivamente ed efficacemente aiutare il nostro allievo in difficoltà? Come possiamo davvero migliorare il nostro insegnamento e, *soprattutto*, il suo apprendimento?

Ancora una volta non pretendiamo di dare una risposta assoluta a quella che può essere considerata una delle principali domande che un insegnante può porsi (e che spesso, in effetti, si pone). Molte volte, in questo lavoro, abbiamo affermato che sarebbe presuntuoso e controproducente illudersi di fornire ricette universali.

Ma è importante sottolineare con forza alcuni elementi essenziali.

Tra questi, uno dei più importanti è la consapevolezza che, per moltissimi versi, l'apprendimento dei nostri allievi dipende inscindibilmente (anche) dalle caratteristiche del nostro insegnamento e dunque dalle nostre scelte. Anzi, insegnamento e apprendimento formano un complesso

[23] Si considerino ad esempio le possibilità di raggiungere risultati apprezzabili con i "principianti deboli" (Vergnaud, Cortes & Favre -Ortigue, 1997). Sul ruolo della definizione segnaliamo: D'Amore, 1986 ; Neubrand, 1990; Bagni & D'Amore, 1992.

unitario; così come gli atteggiamenti dell'insegnante e dell'allievo, le attese, le richieste (sia esplicite che implicite) e le corrispondenti risposte sono strettamente collegate, regolate da quel sistema delicatissimo e intricato di clausole che abbiamo indicato con il termine "contratto didattico".

Non si insegna da soli ("a chi" si insegnerebbe?); così come, da soli, non si apprende ("da chi" si potrebbe apprendere?). Potrà sembrare, questa, un'osservazione banale; ma, a nostro avviso, non sarà mai abbastanza ricordata.

Riprendiamo inoltre alcune considerazioni espresse nell'Introduzione a questo lavoro. Ribadiamo che il "saper insegnare" non deve essere considerato alla stregua di un'arte, di un incontrollabile "dono di natura"; e in modo del tutto analogo, anche l'importanza del "saper apprendere" va smitizzata. Certamente, in alcuni di noi insegnanti una qualche forma di predisposizione (forse) e l'esperienza (spesso) possono rendere facile o piacevole l'attività di insegnamento; analogamente, in questo o in quell'allievo si può manifestare una maggiore o minore predisposizione all'apprendimento della matematica. Ma attenzione: un proficuo insegnamento e un pieno apprendimento non sono mai determinati *esclusivamente* da una fortunata coincidenza, dal casuale incontro di due persone "speciali".

Come dobbiamo regolarci, dunque?

L'importante, per l'insegnante, per *ogni* insegnante, è innanzitutto…non perdere di vista la situazione. Mantenere il controllo della dialettica docente-discente, cercare sempre di sapere che cosa sta succedendo. E quindi riflettere costantemente sui perché, al fine di essere in grado, nei casi di difficoltà, di intervenire tempestivamente e di predisporre i correttivi opportuni[24]. L'eventuale variazione delle nostre scelte didattiche non deve *mai* essere considerata una specie di sconfitta. Tutt'altro: è il fiore all'occhiello, per una didattica consapevole e responsabile.

L'insegnante, *ogni* insegnante, è un ricercatore.

Una corretta, viva, moderna ed efficace azione didattica nel campo della matematica (e analogamente accadse, crediamo, per le altre discipline) non richiede doti eccezionali, rare o irraggiungibili capacità, non deve obbligatoriamente basarsi soltanto su tecniche psicologiche iper-specialistiche, alla portata di pochi eletti. Ma, d'altro canto, non può più essere condotta esclusivamente confidando nell'aiuto del caro, vecchio "istinto": di ciò ogni docente deve essere consapevole.

Solo in questo modo, soltanto grazie a questa consapevolezza, l'insegnante saprà quotidianamente evitare il sorgere di malintesi, di incertezze, di misconcezioni. Saprà continuare ad essere, per il proprio allievo, maestro. Forse, non solo di matematica.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 5

Amaldi, U. (1900), Sulla teoria della equivalenza: Enriques, F. (a cura di) *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna (seconda edizione: 1912; terza edizione: 1924-1927; ristampa anastatica: 1983).

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1998), Ricerca in corso, titolo provvisorio: "Lo vedo ma non ci credo", *comunicazione privata all'autore*.

Bagni, G.T. & D'Amore, B. (1992), Le classificazioni dei quadrilateri, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15, 785-814.

[24] Se con il termine *metacognizione* intendiamo riferirci ad una riflessione sui processi di apprendimento, e con il termine *metarisoluzione* ad una riflessione su quanto fatto per risolvere un problema (come affermato nel capitolo 2), potremmo qui inventare termini come *metainsegnamento*.

Bagni, G.T. (1993a), Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1993: *Bollettino Mathesis Bologna*, 27, 15-16.

Bagni, G.T. (1993b), Funzioni naturali di variabile reale: *La matematica e la sua didattica*, 4, 466-475, Bologna.

Bagni, G.T. (1994), Continuità e discontinuità nella didattica dell'Analisi matematica: Piochi, B. (a cura di), *Atti del IV Incontro dei Nuclei di Ricerca Didattica nella Scuola Superiore*, IRRSAE Toscana, Siena.

Bagni, G.T. (1995), Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1995: *La matematica e la sua didattica*, 4, 520-521.

Bagni, G.T. & Giovannoni, L. (1996), Come è scritto l'enunciato di un problema?: *La Scuola Se*, 4, 16-18.

Bagni, G.T. (1997), La visualizzazione nella didattica della matematica: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.

Bagni, G.T. (1998), *La scelta del contesto e il contratto didattico*, in via di pubblicazione.

Bartolini Bussi, M. (1991), Apprendere la matematica attraverso la discussione: grafici nel piano cartesiano: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 14, 243-258.

Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano.

Brousseau, G. (1983), Ostacles epistemologiques en mathématiques: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2.

Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Penseé Sauvage, Grenoble.

Clemens, K. (1980), Analyzing children's errors on written mathematical tasks: *Educational studies in mathematics*, 11.

D'Amore, B. (1986), Il ruolo della definizione nella didattica della matematica: *Insegnare*, 6, 9-13.

D'Amore, B. & Plazzi, P. (1990), Intuizione e rigore nella pratica e nei fondamenti della matematica: *La matematica e la sua didattica*, IV, 3, 18-24.

D'Amore, B. (1993), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico: *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.

D'Amore, B. (1993a), *Problemi*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1993b), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico: *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.

D'Amore, B. (1995), Lingue e linguaggi nella pratica didattica: Jannamorelli, B. (a cura di), *Atti del II Seminario internazionale di Didattica della Matematica di Sulmona, 'Lingue e linguaggi nella pratica didattica', 30 marzo-1 aprile 1995*, Sulmona.

D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, Opening Relation to Topic Group XIV "Infinite processes throughout the curriculum", 8th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1997), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica": *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

Dapueto, C. (1992), La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica: Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria

superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 19-51.
Davis R. & Vinner S. (1986), The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages: *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.
Davis, P.J. & Hersh, R. (1980), *The mathematical experience*, Birkhäuser, Boston.
Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
Duval, R. (1994a), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique: *Repres IREM*, 17.
Duval, R. (1994b), Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage: *Actes de la Quarantesixieme Rencountre Internationale de la CIEAEM* (in via di pubblicazione).
Duval, R. (1997), La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la résolution: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 25-46, Thessaloniki.
Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A & Maccioni, L. (a cura di), UTET, Torino.
Fischbein, E. (1983), Intuition and proof: *For the Learnong of Mathematics*, 3, 2, 9-24 (traduzione italiana di Copercini, L.: Intuizione e dimostrazione: Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 1-24).
Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Riedel, Dodrecht.
Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts: *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
Furinghetti, F. (1992), Luci ed ombre dell'approccio 'intuitivo': Furinghetti, F. (a cura di), *Definire,*

argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 83-96.

Gagatsis, A. (1995), Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici: *La matematica e la sua didattica*, 2, 136-146.

Gagné, R.M. (1973), *Le condizioni dell'apprendimento*, Armando, Roma (prima edizione: 1970).

Gelbaum, B.R. (1961), *Advanced calculus*, Appleton-Century-Crofts, New York.

Gelbaum, B.R. (1962), *The real number system*, Appleton-Century Crofts, New York.

Gelbaum, B.R. & Olmsted, J.M.H. (1979), *Controesempi in Analisi matematica*, Mursia, Milano.

Glaeser, G. (1984), À propose des obstacles épistemologiques: réponse à Guy Brousseau: *Recherche en Didactique de la Mathématique*, 5.

Goldin, G.A. & Caldwell, J. (1979), Syntax, contentand context variables examined in a research study: Goldin, G.A. & McClintock, C.E. (a cura di), *Task variables in mathematical problem solving*, Eric, Columbus.

Hadamard, J. (1993), *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, Cortina, Milano.

Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (prima edizione originale: 1983).

Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3éme cycle, Université Paris 7, Paris.

Kaldrimidou, M. (1995), Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 2, 181-194.

Laborde, C. (1995), Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica?: *La matematica e la sua didattica*, 2, 121-135.

Lolli, G. (1989), *Capire una dimostrazione*, Il Mulino, Bologna.

Maier, H. (1993a), Conflit entre language mathématique et langue quotidienne pour les élèves: *Cahier de didactique des mathématiques*, 3, 86-118 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1995, 298-305).

Maier, H. (1993b), Problemi di lingua e comunicazione durante le ore di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.

Mazzanti, G. & Piochi, B. (1990), Riflessioni sulla dimostrazione in didattica della matematica: *Didattica delle scienze e dell'informatica nella scuola*, 149, 45-50.

Neubrand, M. (1990), L'apprendere e il riflettere: perché e come associarli nella didattica della matematica: *La matematica e la sua didattica*, IV, 2, 5-16.

Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.

Pellerey, M. (1991), Apprendere a pensare matematicamente: Resnick, L.B. & Ford, W.W., *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*, SEI, Torino.

Pellerey, M. & Orio, F. (1996), La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica: *ISRE*, 2, 52-73.

Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.

Pontecorvo, C. (1981), Educazione e scuola di fronte alle differenze di intelligenza: AA.VV., *Intelligenza e diversità*, Loescher, Torino, 240-323.

Priore, F. (1990), *Modelli, strumenti e misure nella didattica contemporanea*, Mursia, Milano.

Prodi, G. (1970), *Analisi matematica*, Boringhieri, Torino.

Radford, L. (2002), The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge, *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Rogerson, A. & Arora, M. (1995), La didattica della matematica verso il 21° secolo: *La matematica e la sua didattica*, 4, 491-508.

Schoenfeld, A.H. (1986), On having and using geometric knowledge: Hiebert, J. (a cura di), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 225-263, Erlbaum, Hillsdale.

Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.

Speranza, F. (1990), Controindicazioni al riduzionismo, *La matematica e la sua didattica*, IV, 3, 12-17.

Speranza, F. (1992), La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità: Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 135-141.

Vergnaud, G.; Cortes, A. & Favre-Ortigue, P. (1997), Introduzione dell'algebra ai principianti "deboli". Problemi epistemologici e didattici: *La matematica e la sua didattica*, 3, 253-271.

Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).

Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (a cura di), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.

Webb, N. (1979), Content and context variables in problem task: Goldin, G.A. & McClintock, C.E. (a cura di), *Task variables in mathematical problem solving*, Eric, Columbus.

Whorf, B. (1970), *Linguaggio, pensiero e realtà*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1956).

Zan, R. (1995), Chi non riesce in matematica?: D'Amore, B. (a cura di), *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive*, Atti del IX Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica", Castel San Pietro Terme, Pitagora, Bologna, 77-83.