Συλλογισμός
Syllogismos
History and Epistemology for Mathematics Education
Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Appunti di didattica della matematica
(a cura di G.T. Bagni)

Ricerca A
Geometria reticolare
e didattica della matematica

A-1. PREMESSA[1]

Negli ultimi decenni abbiamo potuto riscontrare un crescente interesse didattico per le questioni di geometria reticolare (Stocco, 1986; Gambarelli, 1989; Bagni, 1990), anche da parte di alcuni ricercatori (Kaldrimidou, 1987 e 1995). Tale sensibilità suggerisce l'opportunità di una rivisitazione storica dei modelli collegati al piano di Pick (il piano euclideo associato a tutte le rette che, riferite ad un sistema cartesiano, abbiano equazione $x = m$, $y = n$, con m, n interi).

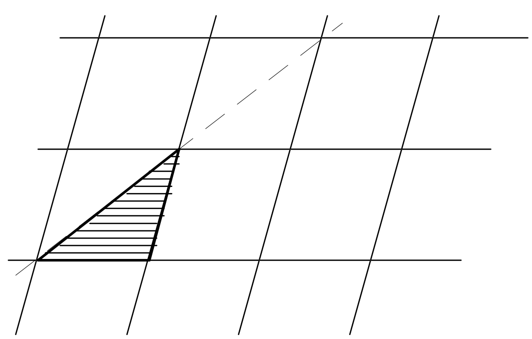
---

[1] Parte del presente articolo è stata pubblicata in: Bagni, G.T. (1996), Geometria e teoria dei numeri nell'opera di Georg Pick: un'esperienza didattica: *Bollettino dei Docenti di Matematica del Canton Ticino*, 33, 43-52, e, in inglese, in: Bagni, G.T, (1997), Georg Pick's reticular geometry and Didactics of Mathematics, D'Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 219-228, Thessaloniki. L'autore ringrazia la dott. Monica Mariotti per la traduzione italiana di: Pick, 1899.

A-2. L'ARTICOLO ORIGINALE DI GEORG PICK (1899)

L'articolo di Pick in cui sono esposte le considerazioni fondamentali di geometria reticolare si intitola *Geometriches zur Zahlenlehre* (*La geometria per la teoria dei numeri*); è il resoconto di una conferenza tenuta dall'Autore presso la Società Matematica Tedesca di Praga e venne pubblicato a Praga nel 1899 (Pick, 1899). Così esordisce Pick in tale articolo:

«A partire da Gauss, i reticoli a forma di parallelogramma nel piano... sono stati più volte utilizzati... come metodo euristico nella teoria dei numeri. A confronto di tutte queste applicazioni, le prossime righe perseguono uno scopo molto più modesto: sarà fatto il tentativo di porre le basi della teoria dei numeri in modo nuovo e, fin dal principio, su basi geometriche. Per questo scopo è necessaria una formula per calcolare l'area dei poligoni tracciati in un reticolo rimasta fino ad oggi inosservata a dispetto, come si potrà vedere, della sua semplicità» (Pick, 1899, p. 311).



Pick introduce il *reticolo* come «due sistemi di rette parallele equidistanti nel piano», dette *rette reticolari principali*; le intersezioni di tali rette sono denominate *punti reticolari* (Pick, 1899, p. 311); tutte le rette passanti per più di un punto reticolare sono dette *rette* reticolari. Egli suggerisce inoltre di utilizzare come unità di misura di superficie «la metà di ogni singola maglia-parallelogramma del reticolo» (Pick, 1899, p. 312).

Un poligono avente tutti i vertici coincidenti con punti reticolari si dice *poligono reticolare*. Per quanto sopra definito, tutti i lati di un poligono reticolare appartengono a rette reticolari (Pick, 1899, p. 312).

Pick suggerisce di scomporre un poligono reticolare in due poligoni mediante una retta reticolare passante per due punti reticolari appartenenti al perimetro. Si indichi con i il numero dei punti reticolari all'interno del poligono inizialmente considerato, con u il numero dei punti reticolari appartenenti al suo perimetro, e con i_1, u_1, i_2, u_2 i numeri dei punti reticolari corrispondenti dei due nuovi poligoni ottenuti; si indichi inoltre con d il numero dei punti reticolari appartenenti al segmento di retta reticolare che divide il poligono originale nelle due parti. Risulta allora:

$$i = i_1+i_2+d$$
$$u = u_1+u_2-2d-2$$

Da ciò segue:

$$2i+u-2 = (2i_1+u_1-2) + (2i_2+u_2-2)$$

Pick indica l'espressione ($2i+u-2$) come *numero di punti* del poligono considerato (Pick, 1899, pp. 312-313).

Da quanto sopra esposto, emerge che «il numero di punti di un poligono costituito da due parti è uguale alla somma dei numeri di punti delle singole parti. Una ripetuta applicazione di questo risultato mostra che esso è accettabile anche per un numero qualsivoglia di parti» (Pick, 1899, p. 313).

Il numero di punti di un poligono regolare ha un'importante interpretazione geometrica: Pick afferma che «per ogni poligono reticolare l'area è uguale al suo numero di punti» (Pick, 1899, p. 314, essendo l'area calcolata rispetto all'unità di misura di superficie precedentemente scelta, ovvero alla metà di ogni singola maglia del reticolo).

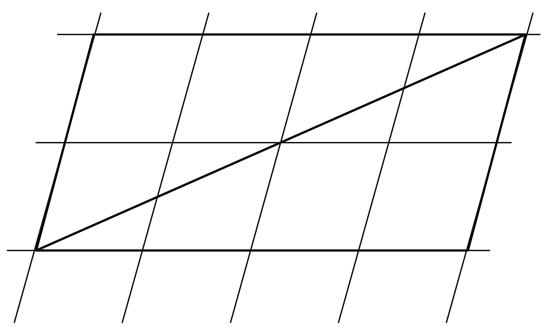
Per dimostrare ciò, Pick nota innanzitutto che il risultato in esame vale nel caso di un poligono costituito da una sola maglia:

$$i = 0 \;\text{ et }\; u = 4$$

da cui il numero di punti:

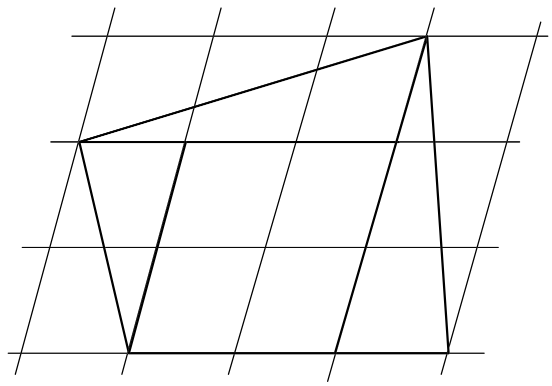
$$2i+u-2 = 2$$

Anche per un poligono limitato esclusivamente da segmenti appartenenti a rette reticolari principali il risultato precedente vale «in base alla citata proprietà di composizione» (Pick, 1899, p. 313).



Inoltre, se suddividiamo un parallelogramma avente il perimetro interamente appartenente a rette reticolari principali in due triangoli congruenti aventi in comune una diagonale (e la congruenza di tali triangoli implica anche la congruenza dei rispettivi insiemi di punti reticolari ad essi appartenenti), il numero di punti di ciascuno di essi viene ad essere la metà di quello del parallelogramma; dunque, anche in questo caso il numero di punti ha il valore dell'are a.

Osserva infine Pick che un qualsiasi poligono reticolare può essere scomposto in parallelogrammi con il perimetro interamente appartenente a rette reticolari principali ed in triangoli ottenuti dimezzando un parallelogramma di questo genere mediante una diagonale. Da ciò segue che per ogni poligono reticolare l'area risulta uguale al numero di punti (Pick, 1899, p. 314).



Dunque la formula che consente di calcolare l'area di un poligono reticolare (ovvero avente tutti i vertici coincidenti con punti reticolari) non intrecciato e non degenere (ovvero tale da non ridursi ad un segmento), rispetto all'area di una maglia del reticolo (costituito da due sistemi di rette parallele equidistanti e mutuamente perpendicolari) è:

Area di un poligono reticolare non intrecciato e non degenere

(calcolata rispetto all'area di una maglia del reticolo) = $(2i+u-2)/2 = i+(u/2)-1$

A-3. METODOLOGIA DELLA RICERCA E RISULTATI DEL TEST

Abbiamo proposto ad alcuni studenti della scuola secondaria superiore di ricavare la formula precedente.

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando una classe di IV liceo scientifico, a Treviso, per un totale di 24 allievi. Essi sono stati innanzitutto invitati a ricavare la formula precedentemente menzionata;

successivamente gli allievi sono stati intervistati sulle soluzioni proposte.

Al momento del test erano stati introdotti i termini: *reticolo*; *maglia*; *punto reticolare*; *poligono reticolare*; *poligono non intrecciato*; *poligono non degenere*. A ciascun allievo è stato sottoposto il seguente test, senza alcuna indicazione sui procedimenti risolutivi da impiegare:

Determinare una formula per calcolare l'area di un poligono reticolare non intrecciato non degenere (calcolata rispetto all'area di una maglia del reticolo) sulla base della valutazione del numero i dei punti reticolari all'interno del poligono e del numero u dei punti reticolari appartenenti al suo perimetro.

Il tempo accordato per la risoluzione è stato di 30 minuti.

Solo 4 allievi su 24 (Andrea, Guido, Martino e Nicoletta) hanno ricavato la formula corretta per determinare l'area di un poligono reticolare non intrecciato e non degenere. Gli altri hanno consegnato il foglio con alcuni tentativi, ovvero con la rappresentazione di casi particolari.

Come vedremo esaminando le interviste, gli allievi che hanno indicato la formula corretta non hanno proposto di essa una dimostrazione "classica", completa; in particolare, l'approccio al problema è stato quasi sempre basato sull'esame di singoli casi, dai quali, mediante osservazioni e supposizioni, è stata ricavata la formula.

A-4. INTERVISTE CON GLI ALLIEVI

Gli allievi che hanno determinato la formula richiesta sono stati invitati a giustificare le loro affermazioni e ad indicare i procedimenti seguiti. La netta maggioranza degli altri allievi, ovvero di quelli che non hanno ottenuto la soluzione, ha ammesso di avere esaminato molti casi particolari senza tuttavia giungere ad intuire la formula generale cercata.

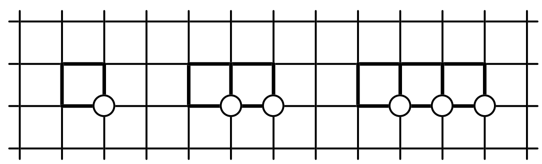
A-2.4.1. ANDREA

Il colloquio con Andrea è stato certamente interessante; riteniamo opportuno riportarne ampi brani:

Andrea: «Ho pensato che la formula da trovare fosse di primo grado».

Intervistatore: «Perché proprio di primo grado?»

Andrea: «Mi è sembrato logico cominciare dal caso più semplice. E poi se associamo ad ogni punto un quadratino, ad esempio quello che si trova in alto a sinistra, si vede che più crescono i punti più cresce l'area. Naturalmente con le opportune correzioni, perché si vede subito che la formula A = u+i non va bene».

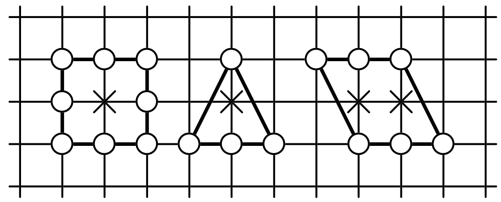


(Andrea disegna i rettangoli evidenziando le maglie ed i punti reticolari sul perimetro).

Andrea: «Quando ho capito che la formula A = u+i non era quella giusta, ho pensato di cercare una formula un po' più complicata, ma sempre di primo grado. Ho pensato ad una formula del tipo:

$$A = a\cdot u + b\cdot i + c$$

con a, b, c numeri opportuni. Ho pensato di ricavare a, b, c con un sistema. Ho preso tre figure semplici».



(Andrea disegna i rettangoli evidenziando i punti reticolari sul perimetro ed i punti reticolari interni).

Intervistatore: «Perché hai scelto proprio quelle tre figure?»

Andrea: «Ho cercato di considerare figure abbastanza semplici che abbiano però anche dei punti interni. Il quadratino (costituito da una sola maglia del reticolo) per esempio non ha punti interni e non so se vada bene. Sostituendo i numeri dei punti sul perimetro, dei punti interni e le aree nell'equazione, ho trovato:

$$\begin{cases} 8a+b+c=4 \\ 4a+b+c=2 \\ 6a+2b+c=4 \end{cases}$$

Ho risolto il sistema ed ho trovato:

a = 1/2; b = 1; c = -1

Dunque la formula è:

A = (u/2)+i-1

Poi per sicurezza ho fatto delle verifiche con altri poligoni e ho visto che questa formula va bene».

Intervistatore: «Perché hai ritenuto opportuno fare ancora delle verifiche?»

Andrea: «Per controllare. Avrei potuto sbagliare i calcoli».

Intervistatore: «A parte i calcoli, sei sicuro del tuo procedimento?»

Andrea: «Sì. In fondo si tratta di un sistema. Lo abbiamo fatto tante volte».

Intervistatore: «Però hai supposto che la formula fosse una relazione di primo grado in *u* ed in *i*. Di questo non potevi essere sicuro».

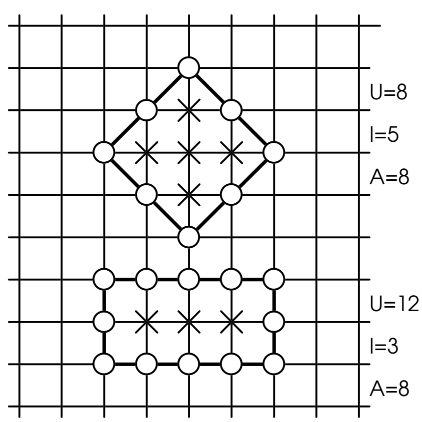
Andrea: «D'accordo, ma che la formula dipendesse da *u* e da *i* lo sapevo dal testo ed ho intuito che fosse di primo grado. La formula, così, funziona».

Analizzeremo le affermazioni di Andrea nella sezione seguente; anticipiamo però che gli elementi più interessanti del procedimento descritto dall'allievo possono essere collegati al tentativo diretto di ricavare la formula richiesta, ovvero senza basarsi sulla preventiva considerazione di molti casi particolari; solo dopo avere supposto che la formula sia di primo grado (supposizione, come vedremo, assai significativa), l'allievo esamina alcuni semplici poligoni per ricavare i coefficienti della formula ipotizzata.

A-2.4.2. MARTINO

Anche il colloquio con Martino è stato interessante; riteniamo opportuno riportarne ampi brani:

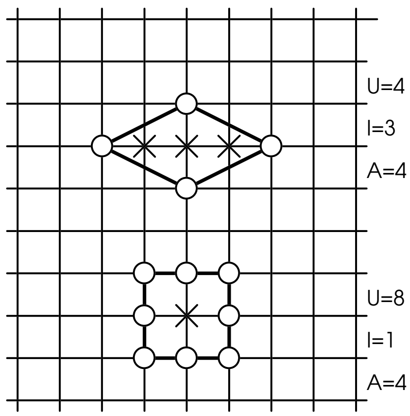
Martino: «Ho pensato di lavorare su queste due coppie di figure, che hanno la stessa area ma diverso numero di punti sul perimetro e di punti interni».



(Martino disegna i poligoni evidenziando i punti reticolari sul perimetro ed i punti reticolari interni. Scrive i numeri nell'ordine in cui sono sopra riportati).

Martino: «All'inizio non sapevo bene cosa fare e sono andato un po' per tentativi».

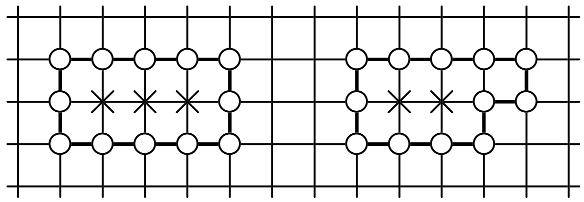
Intervistatore: «Perché due coppie di poligoni con la stessa area?»



Martino: «Ho pensato che questa scelta mi vincolasse di più, mi facesse evitare i casi particolari; insomma mi facesse trovare una formula più generale».

Intervistatore: «Poi come hai ragionato?»

Martino: «Ho notato che il numero di punti reticolari sul perimetro è, in questi casi, addirittura più grande delle aree. Questo mi ha fatto venire l'idea di contarlo per metà. Inoltre ho pensato che, ad esempio nel rettangolo con una sola fila di punti interni, ad ogni punto interno corrispondono due punti sul perimetro, sopra e sotto. Mi è quindi sembrata buona l'idea di dividere per due il numero dei punti sul perimetro. Poi ho considerato un altro fatto».



(Martino disegna i rettangoli evidenziando i punti reticolari sul perimetro ed i punti reticolari interni. Non scrive alcun numero).

Martino: «Da questi disegni mi sembra che l'area dipenda direttamente dal numero dei punti interni: ho diminuito di uno i punti interni lasciando uguale il numero dei punti sul perimetro e l'area è diminuita di 1. Allora ho pensato: l'area potrebbe dipendere dai punti interni, contati tutti, e dai punti sul perimetro, contati per metà. Ho fatto le prove su tutti i poligoni, ma ottenevo sempre un valore più grande di 1. La formula giusta poteva quindi essere proprio $i+(u/2)-1$. Alla fine ho verificato questa formula con altre figure, e andava sempre bene».

Anche le affermazioni di Martino saranno esaminate nella sezione seguente; notiamo sin d'ora che esse sono basate sulla considerazione di poligoni equiestesi mediante i quali studiare le diverse combinazioni di punti reticolari interni e sul perimetro che portano ad uno stesso valore dell'area. Interessante, come vedremo, è l'esplicita preoccupazione di evitare i casi particolari.

A-2.4.3. GUIDO E NICOLETTA

Gli altri due allievi che hanno individuato la formula richiesta affermano di avere intuito la formula richiesta basandosi sull'esame di un elevato numero di casi. In particolare, Guido ricorda di avere esaminato prima alcune figure (rettangoli e triangoli) prive di punti interni:

Guido: «Ho disegnato molti poligoni, e tutti possono essere divisi in triangoli ed in rettangoli. Ho pensato che era bene esaminare alcuni casi di triangoli e di rettangoli. Mi sono occupato di triangoli e di rettangoli senza punti interni ed ho visto che l'area era sempre la metà dei punti sul perimetro meno 1. Ho poi esaminato rettangoli e triangoli con qualche punto interno ed ho capito che bisognava aggiungere il numero dei punti interni».

Nicoletta non opera alcuna scelta preventiva sulle figure da esaminare:

Nicoletta: «Ho provato con molti casi ed ho fatto una tabella con i numeri dei punti sul perimetro, dei punti interni e delle aree. Ho visto che la metà del primo numero più il secondo superava sempre il terzo di 1, e così ho capito qual era la formula».

A-2.5. ANALISI DELLE INTERVISTE E CONCLUSIONI

Dalle interviste con gli allievi emergono alcuni elementi interessanti:

- Andrea è l'unico che si appresta a cercare la formula senza avere preventivamente esaminato alcuni casi particolari (potremmo dire che la risoluzione di Andrea riserva poco spazio a fasi quali l'*incubazione* ed il *bricolage* di Glaeser: D'Amore, 1993). Tutti gli altri allievi, anche coloro i quali non hanno ottenuto la formula cercata, iniziano la propria ricerca esaminando un numero più o meno elevato di situazioni particolari.
- La supposizione di Andrea secondo la quale la formula da trovare può essere espressa da una relazione di primo grado ci sembra rilevante. Tale supposizione, nell'opinione di Andrea (che afferma: «Mi è sembrato logico cominciare dal caso più semplice»), è inizialmente motivata da questioni di elementarità: l'allievo ritiene di

iniziare la propria ricerca esaminando la possibilità più direttamente verificabile. Solo in un secondo momento egli propone una spiegazione di tale opzione basata su (intuitive) considerazioni geometriche: forse il contratto didattico impone ad Andrea di fornire una motivazione più "matematica" ad una scelta inizialmente ritenuta spontanea.

- Il procedimento di Andrea, una volta effettuata l'implicita posizione riguardante il grado della formula da trovare, è piuttosto chiaro e sicuro. Si noti che l'allievo (il quale sa di dover trovare una formula dipendente dal numero *u* dei punti sul perimetro e dai numero *i* dei punti interni) sceglie di esaminare poligoni «abbastanza semplici che abbiano però anche dei punti interni», quasi a rendere più diretta la dipendenza dell'area da *entrambi* i numeri di punti (*u* ed *i*) indicati dal quesito proposto.
- Nel procedimento di Martino è evidente l'idea base di considerare poligoni equiestesi per studiare le diverse combinazioni di numeri di punti reticolari sul perimetro e di punti reticolari interni corrispondenti ad una stessa area; l'esplicita preoccupazione di «evitare i casi particolari» può forse essere ricondotta al contratto didattico. Interessante è l'osservazione della diversa incidenza del numero dei punti reticolari sul perimetro e del numero dei punti reticolari interni. Notiamo tuttavia che nemmeno la deduzione di Martino è sorretta da una dimostrazione "classica": si tratta di un procedimento di analisi di alcuni casi mirati, il cui raffronto consente di intuire il risultato richiesto.
- Interessante è l'affermazione di Guido, che sente la necessità di giustificare la propria scelta iniziale di occuparsi di rettangoli e di triangoli notando che per quanto riguarda i poligoni da lui stesso disegnati «tutti possono essere divisi in triangoli ed in rettangoli» (un'analoga osservazione è presente nell'articolo di Pick); in realtà questa caratteristica non verrà sfruttata dallo stesso Guido nel ricavo della formula (l'elemento centrale verrà ad essere l'esame preventivo di poligoni senza punti interni), ma

l'allievo si sente ugualmente obbligato (dal contratto didattico) a giustificare la propria scelta.

Possiamo concludere rilevando innanzitutto che le questioni di geometria reticolare confermano la propria importanza in ambito didattico e danno la possibilità agli allievi di confrontarsi con richieste e con questioni stimolanti e, per molti, inedite.

Interessante è, negli allievi, l'impiego spontaneo, spesso vivace e creativo di una tecnica dimostrativa inusuale: si tratta di un metodo euristico lontano dai rigorosi procedimenti deduttivi, ma che non per questo può essere considerato scorretto o didatticamente di trascurabile portata. L'allievo appare indotto ad affrontare il problema proposto dopo avere sperimentato varie possibilità, e la scelta critica di tali campi di indagine preventiva, scelta fondamentale per l'esito del tentativo posto in atto, è un importante atto creativo. Il procedimento impiegato da molti allievi (talora con successo) non è dunque basato su tentativi casuali, scoordinati, bensì è incentrato sull'analisi di situazioni geometriche ben determinate; dunque tale metodo di indagine appare sorretto da considerazioni spesso consapevoli, talvolta da supposizioni non immotivate.

La visualizzazione (che viene riconosciuta elemento sempre centrale della moderna didattica: Schoenfeld, 1986; Duval, 1993) sembra peraltro sorreggere questo modo di operare. Il carattere visuale del problema proposto giunge implicitamente a sottolineare la possibilità di effettuare semplici tentativi mirati, immediate analisi di casi particolari da generalizzare quindi, mediante le opportune verifiche, in considerazioni di più ampia portata.

BIBLIOGRAFIA DELLA RICERCA A

Bagni, G.T. (1990), Il piano di Pick e i numeri primi: *Periodico di Matematiche*, VI, 65, 3.

D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.

Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.

Duval, R. (1994a), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique: *Repres IREM*, 17, ottobre.

Duval, R. (1994b), Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage: *Actes de la Quarantesixieme Rencountre Internationale de la CIEAEM* (in via di pubblicazione).

Gambarelli, G. (1989), Su alcuni risultati di G. Stocco: *Periodico di Matematiche*, VI, 65.

Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3éme cycle, Université Paris 7, Paris.

Kaldrimidou, M. (1995), Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 2, 181-194.

Pick, G. (1899), Geometriches zur Zahlenlehre: *Zeitschrift für Natur-Wissenschafen, hrsg. vom Naturhistorisch. Vereine Lotos in Prag*, Prag, 311-319.

Schoenfeld, A.H. (1986), On having and using geometric knowledge: Hiebert, J. (a cura di), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 225-263, Erlbaum, Hillsdale.

Stocco, G. (1986), Proposta per una geometria reticolare: *Periodico di Matematiche*, VI, 62.