



History and Epistemology for Mathematics Education
Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Appunti di didattica della matematica
(a cura di G.T. Bagni)

Ricerca C

Discreto, denso, continuo: le concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi e l'introduzione dei reali

C-1. RAZIONALI E REALI¹

I concetti di numero razionale e reale sono tra i principali contenuti proposti agli studenti della scuola secondaria superiore; frequentemente, tuttavia, lo studio dei razionali e dei reali comporta difficoltà per gli allievi: in particolare, come vedremo, la mancanza di una corretta introduzione didattica degli insiemi infiniti (dunque dei cardinali transfiniti di Cantor) causa il formarsi di dubbi e misconcezioni.

¹ Parte del presente articolo è stata pubblicata in: Bagni, G.T. (2000), Insiemi infiniti di numeri reali, *L'educazione matematica*, XXI, VI, 2, 1, 22-46 (pubblicazione bilingue: in italiano e in inglese).

Per molto tempo le teorie di Cantor sugli insiemi infiniti furono ritenute tra i concetti più delicati della matematica. Non stupisce che anche ai giorni nostri i cardinali transfiniti non siano inseriti nel tradizionale curriculum della secondaria superiore (ci riferiremo principalmente al liceo scientifico italiano).

Abbiamo dunque voluto analizzare il ruolo dei concetti di insieme discreto, denso e continuo nella didattica della matematica della secondaria superiore.

C-2. METODOLOGIA DELLA RICERCA SU RAZIONALI E REALI

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando:

- Una classe di III liceo scientifico, a Treviso, per un totale di 26 allievi; al momento della ricerca (test 1) erano stati introdotti i concetti di insieme, con le relative notazioni, e di cardinalità; i numeri reali erano stati presentati, nella precedente II classe, attraverso le sezioni di Dedekind. Non era stata proposta una trattazione specifica degli insiemi infiniti (definizione di insieme infinito, cardinali transfiniti).

- Una classe di V liceo scientifico, a Treviso, per un totale di 22 allievi; al momento della ricerca (test 2) erano già stati introdotti i concetti di limite e di funzione continua. Non era stata proposta una trattazione specifica degli insiemi infiniti (definizione di insieme infinito, cardinali transfiniti).

Dai risultati dei test 1 e 2 (collocati, dunque, *prima* e *dopo* l'introduzione dei concetti dell'Analisi) intendiamo esaminare lo status dell'apprendimento dei concetti di densità e di continuità, e in particolare desumere l'eventuale rilevanza dell'introduzione dell'Analisi nell'apprendimento di tali concetti.

Agli allievi di entrambe le classi è stato sottoposto il seguente test, senza fornire indicazioni sui procedimenti risolutivi da impiegare:

Test 1 e test 2

1) Determinare il numero di elementi (la cardinalità) dell'insieme:

$$I_{\mathbf{N}} = \{x \text{ appartenente a } \mathbf{N}: 3 \leq x \leq 10\}$$

2) Si consideri ciascuna delle seguenti coppie di numeri razionali; dire se è vero o falso che esiste (almeno) un numero razionale compreso tra i due numeri razionali dati:

(a) $\frac{19}{29}, \frac{11}{16}$

(b) 2,610497, 2,310518

(c) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ con a, b, c, d

appartenenti a $\mathbf{N}-\{0\}$, $\frac{a}{b}$ diverso da $\frac{c}{d}$

3) Determinare il numero di elementi (la cardinalità) dell'insieme:

$$I_{\mathbf{Q}} = \{x \text{ appartenente a } \mathbf{Q}: 3 \leq x \leq 10\}$$

4) L'elemento $\sqrt{26}$ appartiene all'insieme $I_{\mathbf{Q}}$? Perché?

5) Determinare il numero di elementi (la cardinalità) dell'insieme:

$$I_{\mathbf{R}} = \{x \text{ appartenente a } \mathbf{R}: 3 \leq x \leq 10\}$$

6) Tra gli insiemi $I_{\mathbf{N}}, I_{\mathbf{Q}}, I_{\mathbf{R}}$ sopra indicati, quale ha il massimo numero di elementi (la massima cardinalità)?

Il tempo accordato per la risoluzione è stato di 30 minuti. Non è stato concesso l'uso di testi, di appunti, della calcolatrice tascabile, di tavole numeriche o di altri sussidi.

C-3. IL TEST 1 (III LICEO SCIENTIFICO)

C-3.1. RISULTATI DEL TEST 1

1)	Risposta: 8	26	100%
2)	a) Si	21	81%
	No	4	15%
	Non risponde	1	4%
	b) Si	25	96%
	No	1	4%
	Non risponde	0	0%
	c) Si	22	85%
	No	0	0%
	Non risponde	4	15%
3)	Risposta: infinito	19	73%
	Risposta: “tanti (no infinito)”	1	4%
	Non risponde	6	23%
4)	Si	9	34%
	No	15	58%
	Non risponde	2	8%
5)	Risposta: infinito	22	85%
	Risposta: 8	4	15%
6)	Risposta: I_R :	11	42%
	Risposta: I_R e I_Q :	12	46%
	Risposta: I_Q :	2	8%
	Non risponde:	1	4%

C-3.2. PRIME CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI DEL TEST 1

Tutti gli allievi della III classe hanno compreso in modo soddisfacente l'uso della simbologia insiemistica ed il concetto di cardinalità di un insieme finito: la risposta al

primo quesito viene infatti correttamente data dalla totalità degli allievi (100%).

Anche la densità di **Q** è ben compresa dalla maggioranza degli allievi, come emerge dalle risposte al secondo quesito. La cardinalità infinita di **Q** (terzo quesito, 73%) e di **R** (quinto quesito, 85%) sono correttamente comprese dalla maggioranza degli allievi.

Qualche difficoltà emerge a proposito del concetto di irrazionalità (quarto quesito): soltanto il 58% degli allievi afferma che $\sqrt{26}$ non appartiene a **Q**.

Maggiori incertezze emergono dalle risposte al sesto quesito: al fine di una corretta interpretazione di tali risposte, è necessario esaminare le giustificazioni fornite dagli allievi.

C-3.3. INTERVISTE CON GLI ALLIEVI (TEST 1)

Gli allievi della III classe sono stati invitati a riflettere sulle risposte date ed a giustificarle in alcune interviste. Ci concentreremo principalmente sulle giustificazioni fornite per le risposte date al sesto quesito.

Una parte significativa (7 su 11) degli allievi che hanno affermato che la cardinalità maggiore tra quelle date è la cardinalità di I_R si riferisce, in diversi modi, alla motivazione:

I_N incluso in I_Q incluso in I_R

quindi

la cardinalità di I_R è maggiore di quelle di I_Q e di I_N

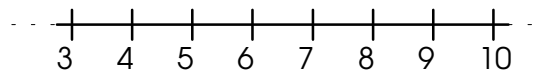
Ad esempio:

«La massima cardinalità è quella di I_R perché gli altri sono suoi sottoinsiemi (propri) e dunque devono avere meno elementi» (Dara).

Gli allievi che hanno risposto che la cardinalità maggiore è quella di I_R e I_Q si sono giustificati affermando che due insiemi infiniti hanno comunque la stessa cardinalità.

Ad esempio, interessante è la seguente risposta:

« I_N occupa solo i punti interi:



e I_Q occupa soltanto le frazioni; I_R occupa tutti gli spazi tra le frazioni. Ma dato che I_Q e I_R sono infiniti la loro cardinalità è per forza la stessa. Del resto con i razionali da 3 a 10 posso coprire tutto il segmento, perché posso disegnare dei punti vicini quanto voglio» (Marco).

C-3.4. ANALISI DELLE INTERVISTE E CONCLUSIONI (TEST 1)

Per quanto riguarda i concetti di densità e di continuità e gli insiemi infiniti, interessante è la presenza di due gruppi (numericamente equivalenti):

- alcuni allievi si basano sulla considerazione:

I_N incluso in I_Q incluso in I_R

quindi

la cardinalità di I_R è maggiore di quelle di I_Q e di I_N

ovvero applicano ad insiemi infiniti considerazioni che potrebbero essere applicate soltanto ad insiemi finiti. Il fatto che un insieme infinito possa essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria (ovvero la definizione stessa di insieme infinito) non viene tenuto presente;

- altri non ritengono possibile confrontare due infiniti ed affermano che un segmento della retta reale contiene tanti razionali (infiniti) quanti reali (infiniti).

La risposta di Marco è interessante, in quanto pone esplicitamente l'accento sull'eventuale aspetto grafico della questione proposta (si veda ad esempio: Duval, 1993; e molti spunti possono essere tratti dal classico lavoro: Fischbein, 1993).

Alcuni allievi, dunque, possono essere tentati di ricondurre l'approccio ai concetti di densità e di continuità ad interpretazioni grafiche, probabilmente anche a causa dell'ampia consuetudine dell'impiego dei metodi grafici nella didattica della matematica nella scuola secondaria superiore (alcuni aspetti sono esaminati in: Bagni, 1997); ma mentre la differenza tra un insieme discreto ed un insieme continuo è graficamente rilevabile (lo stesso Marco *ha rappresentato* graficamente l'insieme I_N), non così potremmo dire della differenza tra un insieme denso ed un insieme continuo (Marco *immagina, descrive* l'eventuale disegno di I_Q e di I_R , ma *non* lo può realizzare).

Il tentativo di usare un registro grafico, in questo caso, non è produttivo: in ultima analisi, si rivela addirittura fuorviante per l'allievo.

C-4. IL TEST 2 (V LICEO SCIENTIFICO)

C-4.1. RISULTATI DEL TEST 2

1)	Risposta: 8	22	100%
2)	a) Si	22	100%
	b) Si	22	100%
	c) Si	22	100%
3)	Risposta: infinito	21	95%
	Non risponde	1	5%
4)	Si	5	23%
	No	16	72%
	Non risponde	1	5%
5)	Risposta: infinito	22	100%

6)	Risposta: I_R :	11	50%
	Risposta: I_R e I_Q :	5	23%
	Risposta: I_R , I_Q e I_N :	2	9%
	Non risponde:	4	18%

C-4.2. PRIME CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI DEL TEST 2

Confermando il risultato della III classe, gli allievi hanno compreso in modo soddisfacente l'uso della simbologia insiemistica ed il concetto di cardinalità di un insieme finito: la risposta al primo quesito è corretta (100%).

La densità di Q è ben compresa dalla totalità degli allievi, come emerge dalle risposte al secondo quesito. La cardinalità infinita di Q (terzo quesito, 95%) e di R (quinto quesito, 100%) sono correttamente comprese.

Analogamente a quanto rilevato nella III classe, qualche difficoltà emerge a proposito del concetto di irrazionalità (quarto quesito): soltanto il 72% degli allievi afferma infatti che $\sqrt{26}$ non appartiene a Q .

Gli allievi manifestano qualche incertezza nella risposta al sesto quesito: sarà interessante esaminare le giustificazioni da essi fornite alle risposte date.

C-4.3. INTERVISTE CON GLI ALLIEVI (TEST 2)

Anche gli allievi della V classe sono stati invitati a riflettere sulle risposte date ed a giustificarle in alcune interviste. Come già fatto per il test proposto nella III classe, ci concentreremo principalmente sulle giustificazioni fornite per le risposte date al sesto quesito.

Quanto osservato nella III classe si ripropone anche nella V classe: la nettissima maggioranza (9 su 11) degli allievi che hanno affermato che la cardinalità maggiore è quella di I_R hanno espresso, in diversi modi, la motivazione:

I_N incluso in I_Q incluso in I_R quindi

la cardinalità di I_R è maggiore di quelle di I_Q, I_N

Significativa è però la giustificazione seguente:

«La cardinalità di I_N è di sicuro minore di quella di I_Q e di quella di I_R perché è finita e le altre sono infinite. Bisognerebbe sapere se l'infinito di I_R è maggiore di quello di I_Q : a prima vista gli elementi di I_R sembrerebbero di più di quelli di I_Q , ma un infinito può essere maggiore di un altro infinito?» (Alvise).

Come rilevato nella III classe, i 5 allievi (23%) che hanno risposto che la cardinalità maggiore è quella di I_R e I_Q si sono giustificati affermando che due insiemi infiniti hanno comunque la stessa cardinalità.

Per quanto riguarda i 2 allievi che hanno affermato che la cardinalità maggiore è quella di I_N, I_Q e I_R , l'errore è da loro stessi spiegato con la giustificazione:

«Ho sbagliato perché ho pensato a **N, Q, R** e non a I_N, I_Q, I_R , e così ho detto che la cardinalità è la stessa, perché sono tutti infiniti» (Anna).

È così confermato che tutti gli insiemi infiniti vengono ad essere intuitivamente considerati di uguale cardinalità.

Tra le giustificazioni riguardanti altre risposte, 8 allievi sui 16 che hanno affermato che $\sqrt{26}$ non appartiene a **Q** hanno espresso, in diversi modi, la seguente motivazione:

$$\begin{aligned} \sqrt{26} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} \text{ et } \sqrt{2} \text{ non appartiene a } \mathbf{Q} \\ \text{et } \sqrt{13} &\text{ non appartiene a } \mathbf{Q} \\ \text{quindi } \sqrt{26} &\text{ non appartiene a } \mathbf{Q} \end{aligned}$$

Citiamo ad esempio:

«Per far vedere che $\sqrt{26}$ è irrazionale mi sono riferito a $\sqrt{2}$ ed a $\sqrt{13}$ perché $\sqrt{2}$ è senz'altro irrazionale, è il primo irrazionale che si studia, e $\sqrt{13}$ è irrazionale dato che 13 non è un quadrato» (Dario).

Di qualche interesse è inoltre la risposta seguente:

«Secondo me $\sqrt{26}$ non è razionale, ma non saprei spiegare il perché. Credo che non sia possibile elevare al quadrato un numero di cui non so nemmeno quanti decimali ha. Probabilmente questi decimali hanno anche una fine, ma io non posso saperlo» (Maurizio).

Interessante è questa posizione espressa da Maurizio: essa fa riferimento alla scrittura decimale di un numero irrazionale; l'allievo dichiara di non conoscere il numero di cifre decimali che appaiono in $\sqrt{26}$ (cifre che “probabilmente... hanno anche una fine”) e ciò renderebbe operativamente impossibile elevare al quadrato un simile numero. L'allievo però non sa concludere il proprio ragionamento: si limita a prendere atto della difficoltà operativa nell'elevare al quadrato un numero come $\sqrt{26}$ scritto in forma decimale ed ipotizza che tale numero non sia razionale, ma ammette di non sapere “spiegare il perché”.

C-4.4. ANALISI DELLE INTERVISTE E CONCLUSIONI (TEST 2)

A parte qualche lieve differenza di carattere quantitativo, gli allievi della V classe presentano una situazione del tutto analoga a quella precedentemente evidenziata per gli allievi della III classe.

In particolare, la giustificazione:

I_N incluso in I_Q incluso in I_R

quindi

la cardinalità di I_R è maggiore di quelle di I_Q , I_N

è significativa: gli allievi (in percentuale assai rilevante, l'82% degli allievi che hanno affermato che la cardinalità maggiore è quella di I_R ed il 41% del totale) applicano ad insiemi infiniti considerazioni che potrebbero essere

applicare soltanto ad insiemi finiti. Il fatto che un insieme infinito possa essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria (ovvero la stessa definizione di insieme infinito) non viene in alcun modo considerato.

Resta però la perplessità espressa da Alvisè in modo eccezionalmente consapevole:

“ma un infinito può essere maggiore di un altro infinito?”

E il 23% degli allievi opta per una risposta negativa, affermando quindi che un segmento della retta reale contiene tanti razionali (infiniti) quanti reali (infiniti).

Sebbene non sia direttamente ricollegabile alla didattica della continuità, la giustificazione:

$$\sqrt{26} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} \text{ et } \sqrt{2} \text{ non appartiene a } \mathbf{Q}$$

$$\text{et } \sqrt{13} \text{ non appartiene a } \mathbf{Q}$$

$$\text{quindi } \sqrt{26} \text{ non appartiene a } \mathbf{Q}$$

appare interessante: gli allievi che invocano tale giustificazione fanno risalire l'irrazionalità di $\sqrt{26}$ all'irrazionalità di $\sqrt{2}$ (che, per Dario, è il “primo irrazionale che si studia”) e all'irrazionalità di $\sqrt{13}$; ma lo stesso Dario ammette che $\sqrt{13}$ è irrazionale in quanto 13 non è un quadrato: allora perché non giustificare direttamente in questo modo l'irrazionalità di $\sqrt{26}$?

La citazione di $\sqrt{2}$, evidentemente, viene ad essere più rassicurante per l'allievo: il ricorso ad un irrazionale celebre, al “primo irrazionale che si studia” non può che dare alla risposta una maggiore credibilità! Una tipica situazione che rientra nell'ambito delle clausole del contratto didattico (Brousseau, 1987).

C-5. RAZIONALI E REALI: CONCLUSIONI

La presentazione del concetto di continuità della retta reale, nel curriculum tradizionale del liceo scientifico, appare

debole ed incompleta; soprattutto la differenza tra densità e continuità non sembra essere sempre compresa dagli allievi.

In particolare, dopo la presentazione delle sezioni di Dedekind (II classe, peraltro *mai* esplicitamente citate dagli allievi di III classe e di V classe), lo stesso studio dell'Analisi (V classe) non migliora di molto la situazione: i risultati ottenuti dagli allievi della V classe e le giustificazioni da essi esposte nelle interviste non differiscono in termini significativi dai risultati e dalle giustificazioni degli allievi più giovani.

Il tentativo di applicare direttamente alcune rappresentazioni grafiche alla comprensione della differenza tra insieme denso ed insieme continuo è destinato a fallire: R. Duval sottolinea che l'apprendimento mediante le rappresentazioni grafiche «esige un particolare lavoro» e «non è più possibile affidarsi per la loro utilizzazione all'interpretazione spontanea di figure e di immagini» (Duval, 1994). La «doppia natura», da un lato ideale, astratta e dall'altro reale, di molti oggetti matematici, secondo la teoria dei concetti figurati di E. Fischbein (Fischbein, 1993), non sembra avere particolare rilevanza nel caso attuale; ed anche le implicazioni didattiche collegate a tale doppia natura, come la provata utilità dei diversi registri di rappresentazione semiotica per l'apprendimento (Duval, 1993; Kaldrimidou, 1987), devono quindi essere valutate con molta prudenza, per non risultare inutili o fuorvianti per l'allievo.

Una didattica specifica degli insiemi infiniti (basata dunque su di una rigorosa introduzione del concetto di insieme infinito, come insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria) e dei cardinali transfiniti si rivela a nostro avviso indispensabile per un corretto e completo apprendimento dei concetti di densità e di continuità e, quindi, per la sistemazione teorica dei numeri reali.

C-6. INTEGRALE E MISURA

C-6.1. ALCUNI RICHIAMI STORICI

«Sebbene l'idea di integrazione risalga al tempo di Archimede, la teoria dell'integrazione è una creazione del XX secolo».

Eric T. Bell

Un momento storicamente importante per le concezioni della densità e della continuità è individuabile nell'introduzione dell'integrale. La stessa definizione dell'integrale e la precisazione delle funzioni Riemann-integrabili portano, come vedremo, gli allievi della scuola secondaria superiore (nel liceo scientifico, gli allievi della V classe) a riflettere sui concetti di insieme denso e di insieme continuo.

Fu Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) a segnalare la necessità di precisare il concetto di integrale in modo moderno; egli mise a punto le condizioni di integrabilità con riferimento alle somme oggi dette somme superiori e inferiori: l'integrale corrispondente, com'è noto, viene detto integrale secondo Riemann (Kline, 1991, II, p. 1119; Laugwitz, 1995; per la storia della matematica nella prima metà del XX secolo si veda: Pier, 1994).

La questione dell'integrabilità (secondo Riemann) ha una notevole importanza didattica. Com'è noto, infatti, in alcuni casi di discontinuità della funzione integranda, l'integrale di Riemann può non essere applicabile.

Esaminiamo a tale riguardo un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann (faremo uso della *funzione caratteristica* χ_A di A sottoinsieme di \mathbf{R} , che assume valore 1 se e solo se x appartiene ad A , 0 se e solo se x appartiene a $\mathbf{R}-A$). Sia \mathbf{Q} l'insieme dei reali razionali e consideriamo la funzione espressa da:

$$y = \chi_{[a;b]}\chi_{\mathbf{Q}}$$

(con a appartenente a \mathbf{R} , b appartenente a \mathbf{R} , $a < b$) definita in \mathbf{R} ; essa assume valori diversi da 0 se e solo se $a \leq x \leq b$ e x è un reale razionale. Si prova che la funzione $\chi_{[a,b]} \chi_{\mathbf{Q}}$ non è integrabile secondo Riemann in $(a; b)$ per ogni a, b con $a < b$. Tale funzione è talvolta denominata *funzione di Dirichlet*, dal nome di Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

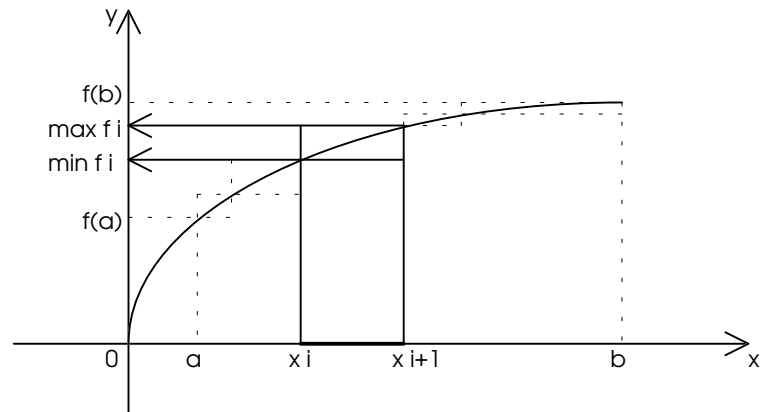
È possibile estendere il concetto di integrale in modo da rendere integrabili funzioni come quella ora esaminata. La teoria dell'integrazione ha avuto, all'inizio del XX secolo, un forte impulso grazie all'opera di Emile Borel (1871-1956) e soprattutto di Henri Lebesgue (1875-1941); basandosi sulla rivisitazione dello stesso concetto di misura di un insieme, Lebesgue ha rivoluzionato l'intera impostazione teorica del concetto di integrale.

Esempi di insiemi da misurare secondo Lebesgue possono essere facilmente proposti: consideriamo l'insieme non elementare $I = \{x \text{ appartenente a } \mathbf{R}: a \leq x \leq b \text{ et } x \text{ appartenente a } \mathbf{Q}\}$ (essendo \mathbf{Q} l'insieme dei reali razionali, a, b reali con $a < b$); si verifica che I è misurabile secondo Lebesgue e che la misura di Lebesgue di I è: 0 (per approfondire l'integrazione secondo Lebesgue si possono consultare: Rudin, 1975; Kolmogorov & Fomin, 1980).

C-6.2. L'INTEGRALE SECONDO LEBESGUE

Ma l'introduzione della misura di Lebesgue non è il punto centrale del nostro studio. Il procedimento di integrazione secondo Lebesgue può infatti essere riferito alla misura di Lebesgue (e viene così a riguardare le funzioni Lebesgue-integrabili), ma anche alla tradizionale misura di Peano-Jordan di un segmento (secondo la quale la misura di $[a; b]$ è $b-a$): in quest'ultimo caso il procedimento di integrazione riguarda le sole funzioni Riemann-integrabili e, come vedremo, coincide (nel risultato numerico e nel concetto,

anche se non nei dettagli della procedura) con l'integrazione secondo Riemann.

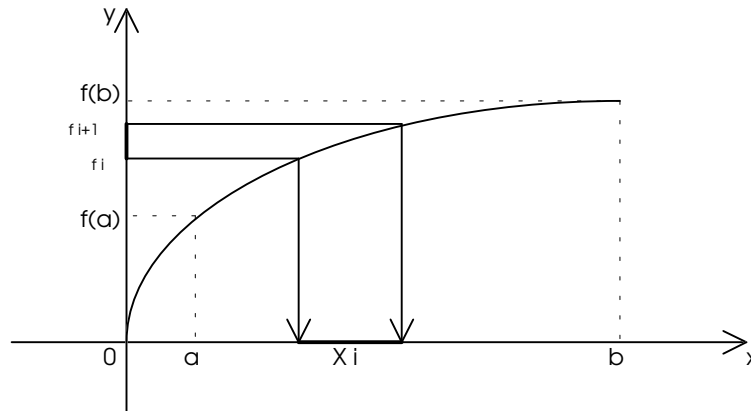


Rammentiamo innanzitutto come viene didatticamente introdotto l'integrale secondo Riemann: per determinare

$\int_a^b f(x)dx$, l'intervallo di integrazione $(a; b)$ è suddiviso in intervalli; quindi sono considerate le somme superiori e le somme inferiori relative ad ogni possibile suddivisione (le aree sottese dalle "funzioni a scalini", continue a tratti) ed è infine verificata la coincidenza dell'estremo superiore delle somme inferiori e dell'estremo inferiore delle somme superiori.

L'integrazione secondo Lebesgue di una funzione f in $(a; b)$ prende invece in considerazione l'intervallo delle ordinate compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in $(a; b)$. Tale intervallo viene diviso in intervalli con la suddivisione: $f(a) = f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq f_4 \leq \dots \leq f_n = f(b)$.

Sia $L(X_i)$ la misura (di Lebesgue, ma lo stesso procedimento potrebbe essere effettuato con la misura di Peano-Jordan) del sottoinsieme X_i di $(a; b)$ costituito dalle controimmagini di $(f_i; f_{i+1})$, ovvero dalle x appartenente a $(a; b)$ tali che sia $f_i \leq f(x) \leq f_{i+1}$.



Se al tendere a 0 dell'ampiezza del massimo intervallo (f_i ;

f_{i+1}) (le due somme $s = \sum_{i=0}^n L(X_i) f_i$ e $S = \sum_{i=0}^n L(X_i) f_{i+1}$ tendono allo stesso limite, allora la f si dice integrabile secondo Lebesgue in $(a; b)$ ed il comune valore limite di s e di S si

dice integrale di f in $(a; b)$, $\int_{[a;b]} f(x) dL$, essendo L la misura scelta.

C-7. METODOLOGIA DELLA RICERCA SULL'INTEGRAZIONE

C-7.1. L'INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE E LA MISURA DI PEANO-JORDAN

Quanto espresso nel paragrafo precedente rappresentò, storicamente, una svolta radicale: non solo lo strumento "integrale" (e con esso il concetto di "funzione integrabile") perdeva la sua assoluta unicità; ma soprattutto veniva ad essere chiarito *il ruolo essenziale della misura nell'integrazione*. Il passaggio dall'integrale di Riemann all'integrale di Lebesgue non dipende infatti soltanto dal diverso modo di procedere per la sua definizione (la suddivisione dell'intervallo *immagine* dell'intervallo di

integrazione), ma dipende essenzialmente dal passaggio dalla misura di Peano-Jordan alla misura di Lebesgue.

In altri termini: se applicassimo la tecnica suggerita da Lebesgue mantenendo il riferimento alla “vecchia” misura di Peano-Jordan, non supereremmo, sostanzialmente, il “vecchio” integrale di Riemann.

Abbiamo deciso di approfondire una questione metodologica a nostro avviso fondamentale: qual è la differenza (dal punto di vista didattico) tra l'introduzione dell'integrale secondo Riemann e dell'integrale secondo Lebesgue? E più in particolare: quale di questi procedimenti può essere più efficace nella didattica dell'Analisi, con riferimento all'ultimo anno della scuola secondaria superiore?

C-7.2. LA NOSTRA RICERCA

La nostra ricerca è stata dunque incentrata sulla seguente questione: la tradizionale introduzione dell'integrale secondo Riemann (ovvero mediante la suddivisione dell'intervallo di integrazione) può essere sostituita con qualche vantaggio dall'introduzione dell'integrale secondo Lebesgue (ovvero mediante la suddivisione dell'intervallo *immagine* dell'intervallo di integrazione), pur mantenendo il riferimento alla misura di Peano-Jordan?

Per dare una risposta a tale quesito abbiamo fatto riferimento ai seguenti test:

- **Test 3.** Abbiamo voluto esaminare lo status del concetto di funzione integrabile (Riemann-integrabile) in una classe nella quale era stato introdotto in modo tradizionale l'integrale secondo Riemann.

- **Test 4.** Abbiamo ripetuto il test precedente in una classe nella quale era stato introdotto l'integrale secondo Lebesgue, ma con il solo riferimento alla misura di Peano-Jordan.

L'analisi del comportamento degli allievi è stata dunque condotta esaminando due classi V liceo scientifico, nella provincia di Treviso:

- Una classe, per un totale di 25 allievi, nella quale al momento del test 3 erano già stati introdotti il concetto di limite, di funzione continua, di derivata e di integrale secondo Riemann. Era stata introdotta la funzione caratteristica di un insieme. Non era stata proposta l'integrazione secondo Lebesgue.

- Una classe, per un totale di 24 allievi, nella quale, al momento del test 4 era già stato introdotto il concetto di limite, di funzione continua, di derivata e di integrale con il procedimento di Lebesgue, ma con riferimento alla misura di Peano-Jordan. Era stata introdotta la funzione caratteristica di un insieme.

Agli allievi di tali classi è stato dunque proposto il seguente test, senza alcuna indicazione sui procedimenti risolutivi da impiegare:

Test 3 e Test 4

Si considerino le funzioni reali di variabile reale espresse da:

(a) $y = x^2 + 3x + 2$

(b) $y = \chi_{[0;1]} + 2\chi_{[1;2]}$

(c) $y = \chi_{[0;1]} + 2\chi_{[1;2]}$

(d) $y = \chi_{[0;2]} \chi_0$

Per ciascuna di esse si dica, giustificando la risposta, se si tratta di funzioni integrabili (secondo Riemann) nell'intervallo $[0; 2]$.

Il tempo accordato per la risoluzione è stato di 20 minuti. Non è stato concesso l'uso di testi, di appunti, della calcolatrice tascabile, di tavole numeriche o di altri sussidi.

C-8. IL TEST 3 (V LICEO SCIENTIFICO)

C-8.1. RISULTATI DEL TEST 3

	Integrabile	Non integ.	Ness. risp.
(a)	24 96%	0 0%	1 4%
(b)	15 60%	4 16%	6 24%
(c)	13 52%	7 28%	5 20%
(d)	10 40%	8 32%	7 28%

C-8.2. PRIME CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI DEL TEST 3

Osserviamo che l'integrabilità della funzione polinomiale (a) è affermata dalla quasi totalità degli allievi.

Le difficoltà sono più rilevanti nei casi delle funzioni (b) e (c) che presentano una discontinuità (in $x = 1$) interna all'intervallo di integrazione (0; 2).

Assai più deludente appare invece la situazione per quanto riguarda la funzione (d): solo il 32% degli allievi riconosce che tale funzione non è Riemann-integrabile in (0; 2). Ben il 40% reputa erroneamente integrabile tale funzione ed il 28% non dà alcuna risposta.

C-8.3. MOTIVAZIONI ESPRESSE DAGLI ALLIEVI (TEST 3)

Gli allievi sono stati invitati a riflettere sulle risposte date ed a giustificarle in alcune interviste.

Una notevole parte degli allievi che hanno reputato non integrabili le funzioni (b) e (c) (rispettivamente 3 allievi su 4 e 4 su 7) hanno collegato tale affermazione alla presenza di una discontinuità all'interno dell'intervallo di integrazione. Riportiamo ad esempio una giustificazione:

«Una funzione continua è integrabile; ho ritenuto che queste funzioni, non essendo continue in 1, non fossero integrabili» (Umberto).

Appare qui evidente un errore logico su di una condizione sufficiente di integrabilità, interpretata come condizione necessaria.

Interessante ci sembra la giustificazione seguente, data da un allievo che ha affermato l'integrabilità della funzione (b), ma ha negato l'integrabilità della funzione (c):

«La funzione (c) vale 1 da 0 a 1 (escluso), vale 3 nel punto 1 e vale 2 da 1 (escluso) a 2. Mi è sembrato strano ammettere che una funzione di questo genere fosse integrabile: avrebbe avuto lo stesso integrale della precedente (c) pur avendo il punto per $x = 1$ più alto. Adesso capisco di essermi sbagliato: sotto al solo punto (1; 3) della (c) non può essere compresa una superficie vera e propria e l'integrale quindi non cambia rispetto alla funzione (b)» (Marco).

Riprenderemo questa importante considerazione confrontando i risultati del test 3 e del test 4.

Per quanto riguarda la funzione (d), la grande maggioranza degli allievi (8 su 10) che ne hanno affermato l'integrabilità ha affermato che l'area sottesa dal suo grafico non è numericamente diversa dall'area del rettangolo di base (0: 2) e di altezza 1.

Ricordiamo una giustificazione a tale proposito:

«Tra due numeri qualsiasi stanno infiniti razionali. Dunque ho pensato che la parte di piano sotto il grafico della funzione (d) fosse tutto il rettangolo, costituito da un numero infinito di colonnine infinitamente vicine» (Andrea).

Ancora una volta, dunque, *la differenza tra denso e continuo appare ben poco chiara nelle concezioni degli allievi.*

Tra gli allievi che hanno riconosciuto come non integrabile la funzione (d), pochi sono stati in grado di motivare la propria scelta; ricordiamo la giustificazione seguente:

«La funzione (d) non delimita una superficie con l'area calcolabile perché il suo grafico non è un segmento intero, ma soltanto un fitto susseguirsi di punti» (Sergio).

Merita infine di essere citata l'osservazione... sconsolata di un'allieva, che conferma la difficoltà nell'affrontare la questione dell'integrabilità di una funzione, legata alla possibilità di eseguire un procedimento (la suddivisione dell'intervallo di integrazione e la considerazione delle somme superiori ed inferiori, le quali devono tendere ad uno stesso valore) e non ad una definizione immediatamente applicabile, come ad esempio la tradizionale definizione didattica di funzione continua:

«Ho avuto problemi con l'integrabilità. Dire se una funzione è continua e se una funzione è derivabile è più facile: ci sono delle regole chiare, basta calcolare dei limiti, ci sono poche eccezioni facili da ricordare, come i punti angolosi. Per l'integrabilità invece non so mai che cosa devo guardare...» (Francesca).

C-8.4. ANALISI DELLE INTERVISTE E CONCLUSIONI (TEST 3)

La valutazione dell'integrabilità (secondo Riemann) di una funzione è un problema delicato per gli allievi della scuola secondaria superiore (certamente più difficoltoso della valutazione della continuità e della derivabilità, come ha osservato Francesca). Gli allievi spesso cercano una regola semplice, immediatamente applicabile negli esercizi pratici

ed alcuni di loro finiscono per identificare l'integrabilità con la continuità, tramutando così in condizione necessaria una condizione soltanto sufficiente.

Ancora una volta la differenza tra denso e continuo non appare ben compresa da una significativa parte degli allievi, nonostante essi abbiano ormai alle spalle alcuni mesi di studio dell'Analisi matematica (limiti, continuità, derivate). Il problema dell'integrabilità (secondo Riemann) della funzione di Dirichlet (d) conferma che la differenza tra $\{x \in \mathbf{R}: 0 \leq x \leq 2 \wedge x \in \mathbf{Q}\}$ (denso e non misurabile con la misura di Peano-Jordan) e $\{x \in \mathbf{R}: 0 \leq x \leq 2\}$ (continuo, misurabile con la misura di Peano-Jordan) è avvertita da pochi allievi.

Con il test seguente potremo verificare che l'impostazione dell'integrale secondo lo schema di Lebesgue (mantenendo il riferimento alla misura di Peano-Jordan, dunque considerando sempre le funzioni Riemann-integrabili) migliora la comprensione dell'integrabilità di alcune funzioni, mentre non porta sostanziali vantaggi per altre.

C-9. IL TEST 4 (V LICEO SCIENTIFICO)

C-9.1. RISULTATI DEL TEST 4

	Integrabile	Non integ.	Ness. risp.
(a)	22 92%	1 4%	1 4%
(b)	20 83%	3 13%	1 4%
(c)	18 75%	2 8%	4 17%
(d)	7 29%	9 37%	8 33%

C-9.2. PRIME CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI DEL TEST 4

Come nel caso del test 3, osserviamo che l'integrabilità della funzione polinomiale (a) è compresa dalla quasi totalità degli allievi.

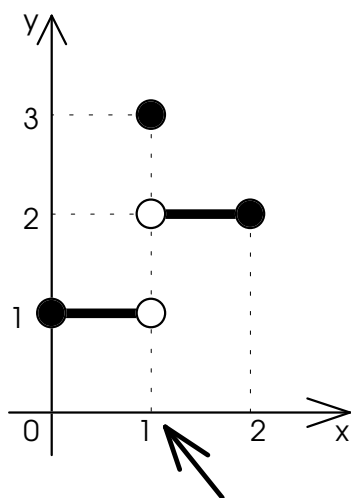
La situazione per quanto riguarda le funzioni (b) e (c) (che presentano una discontinuità interna all'intervallo di integrazione) appare migliorata rispetto al precedente test 3: le risposte corrette sono passate dal 60% all'83% (b) e dal 52% al 75% (c).

Ancora piuttosto deludente appare invece la situazione per quanto riguarda la funzione (d): solo il 37% degli allievi riconosce che tale funzione non è Riemann-integrabile in $(0; 2)$ e tale risultato migliora di poco il 32% del test 3. Il 29% reputa erroneamente integrabile tale funzione (era il 40% nel test 3) ed aumenta la percentuale degli indecisi: il 33% non dà alcuna risposta (era il 28% nel test 3).

C-9.3. MOTIVAZIONI ESPRESSE DAGLI ALLIEVI (TEST 4)

Gli allievi sono stati invitati a riflettere sulle risposte date ed a giustificarle in alcune interviste.

Tra gli allievi che hanno reputato non integrabili le funzioni (b) e (c) alcuni hanno fatto riferimento alle discontinuità; presentiamo quanto afferma Stefano, che schizza il grafico sotto riportato, corrispondente al corretto diagramma cartesiano della funzione (c):



«Avevo pensato che le discontinuità delle funzioni (b) e (c) mi dessero dei problemi nell'integrare, ma ho proprio sbagliato. Ad esempio, la funzione (c) ha il grafico che può essere pensato diviso in tre parti, con le immagini 1, 2, 3. La parte con immagine 1 viene dall'intervallo $(0; 1)$, che misura 1; la parte con immagine 2 viene

dall'intervallo $]1; 2)$, che misura 2; la parte con immagine 3 viene dal solo punto $x = 1$, che ha la misura nulla, perché è: $1-1$. L'area totale dunque si può calcolare senza problemi, sommando le tre parti; ottengo: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$, cioè 3» (Stefano).

Per quanto riguarda l'integrabilità della funzione (d), molti studenti che non negano la sua integrabilità (9 su 15) manifestano esplicitamente incertezze sulla misurabilità (con la misura di Peano-Jordan) di $\{x \text{ appartenente a } \mathbf{R}: 0 \leq x \leq 2 \text{ et } x \text{ appartenente a } \mathbf{Q}\}$, controimmagine di $y = 1$. Riportiamo a tale proposito un'affermazione (altre giustificazioni esprimono la stessa posizione):

«All'ordinata 1 si arriva dai numeri razionali compresi tra 0 e 2. La loro misura è $2-0 = 2$, dunque l'area è $2 \cdot 1 = 2$ » (Tullio).

Denso e continuo, dunque, vengono nuovamente identificati.

Tra gli allievi che negano l'integrabilità della funzione (d) una giustificazione è la seguente:

«Non ho una superficie da misurare perché è sempre intervallata da striscioline che dovrei escludere. Del resto i numeri razionali e gli irrazionali sono mischiati tra di loro e non possono essere divisi. Per cui credo che l'area non possa essere calcolata e quindi che la funzione (d) non possa essere integrata» (Antonella).

C-9.4. ANALISI DELLE INTERVISTE E CONCLUSIONI (TEST 4)

L'introduzione dell'integrale secondo il procedimento di Lebesgue (con riferimento alla misura di Peano-Jordan) sembra migliorare la comprensione della nozione di funzione Riemann-integrabile. I dati statistici sopra presentati per le funzioni (b) e (c) sono chiari e la

giustificazione di Stefano (che fa esplicitamente riferimento alla misura della controimmagine di $y = 3$) appare più convincente e consapevole di quella di Marco (che si riferisce genericamente all'assenza di una "superficie vera e propria" in corrispondenza dell'ascissa $x = 1$).

Per quanto riguarda la funzione di Dirichlet, invece, la situazione non è significativamente migliorata rispetto al test 3. I dubbi sulla distinzione tra densità e continuità restano e dunque la mancanza di una specifica didattica dell'infinito e dei cardinali transfiniti impedisce agli allievi di inquadrare chiaramente alcune funzioni Riemann-integrabili.

C-10. INTEGRALE E MISURA: CONCLUSIONI

«Devo pagare una certa somma; mi frugo nelle tasche e ne estraggo monete e biglietti di diverso valore. Li verso al mio creditore nell'ordine in cui mi si presentano fino a raggiungere il totale del mio debito. È l'integrale di Riemann. Ma posso operare anche altrimenti. Avendo tratto tutto il mio denaro dalla tasca, riunisco insieme biglietti e monete che hanno lo stesso valore ed effettuo il pagamento versando insieme pezzi dello stesso valore. È il mio integrale».

Henri Lebesgue

A nostro avviso un ruolo didattico per l'integrazione secondo Lebesgue non solo non è improponibile, ma risulta addirittura auspicabile.

L'introduzione tradizionale dell'integrale secondo Riemann (ovvero mediante *la suddivisione dell'intervallo di integrazione*) può essere infatti proficuamente sostituita dall'introduzione dell'integrale secondo Lebesgue (ovvero mediante *la suddivisione dell'intervallo immagine*

dell'intervallo di integrazione). Tale opzione non appare concettualmente difficoltosa e può essere messa in atto mantenendo il consueto riferimento alla misura di Peano-Jordan, ovvero senza obbligatoriamente introdurre la misura di Lebesgue (un eventuale secondo passo, più impegnativo dal punto di vista della didattica della scuola secondaria superiore, potrebbe essere l'introduzione della misura di Lebesgue; ciò consentirebbe di ampliare la nozione di integrabilità e quindi di analizzare chiaramente alcuni semplici esempi di funzioni non Riemann-integrabili).

I vantaggi connessi all'impostazione così ipotizzata sarebbero almeno due:

- L'allievo apprenderebbe fin dal suo primo approccio con l'Analisi un procedimento assai importante, versatile ed elegante, che troverebbe la sua naturale applicazione nell'integrazione astratta, introdotta nei corsi matematici superiori (l'integrale di Lebesgue è infatti largamente applicato dall'Analisi contemporanea, anche in molte situazioni applicative).

- Concettualmente, l'allievo inizierebbe a *distinguere il ruolo dell'integrale da quello della misura*; egli potrebbe dunque rendersi conto che la potenza dello strumento "integrale" (strumento che, come sopra rilevato, non varia passando dall'integrazione eseguita tecnicamente secondo Riemann a quella secondo Lebesgue) dipende essenzialmente dal tipo di misura impiegata.

Le considerazioni precedenti, tuttavia, *assumerebbero rilievo ben maggiore se la scelta suggerita fosse abbinata ad una didattica specifica dell'infinito e dei cardinali transfiniti*. Infatti alcuni esempi di funzioni non Riemann-integrabili (che assumono valori non nulli soltanto su insiemi non misurabili con la misura di Peano-Jordan) coinvolgono direttamente questioni connesse ai concetti di densità e di continuità. Le incertezze su tali argomenti, quindi, si ripercuotono nettamente sulla comprensione da

parte degli allievi del concetto di funzione Riemann-integrabile.

C-11. CONCLUSIONI GENERALI: PER UNA NUOVA DIDATTICA DELL'INFINITO

Il tradizionale curriculum matematico della scuola secondaria superiore, e in particolare quello del liceo scientifico, è suscettibile di alcuni notevoli miglioramenti.

La mancanza di una didattica specifica della problematica connessa al concetto di infinito (in particolare dei cardinali transfiniti) toglie incisività e chiarezza ad alcuni argomenti di notevole importanza, tra i quali la concezione della continuità dell'insieme dei numeri reali. Alcuni tentativi ingenui di visualizzare insiemi densi ed insiemi continui appaiono inefficaci ed addirittura fuorvianti in assenza di un'attenta introduzione didattica dei corrispondenti concetti: non possiamo non citare ancora R. Duval, secondo il quale «non è più possibile affidarsi... all'interpretazione spontanea di figure e di immagini» (Duval, 1994).

L'assenza di una corretta trattazione dell'infinito e dei cardinali transfiniti rende inoltre difficoltoso l'inserimento nel curriculum di una più moderna, completa ed efficace introduzione del concetto di integrale. Abbiamo potuto constatare che l'impostazione dell'integrazione secondo Lebesgue (seppure ancora riferita alla misura di Peano-Jordan), basata sulla suddivisione in intervalli dell'immagine dell'intervallo di integrazione, consente un efficace approccio degli studenti alla nozione di funzione Riemann-integrabile; essa richiede però una buona, sicura conoscenza dei concetti di densità e di continuità. Carenze didattiche a tale riguardo finiscono quindi per limitare pesantemente (o addirittura per escludere) una concreta possibilità di miglioramento della didattica del concetto di integrale.

BIBLIOGRAFIA DELLA RICERCA C

- Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.
- Bagni, G.T. (1997), La visualizzazione nella scuola secondaria superiore: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.
- Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.
- Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.
- Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.
- Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.
- D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, Opening Relation to Topic Group XIV "Infinite processes throughout the curriculum", 8th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).
- Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
- Duval, R. (1994), Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage: *Actes de la Quarantesixieme Rencountre Internationale de la CIEAEM* (in via di pubblicazione).
- Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts: *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3éme cycle, Université Paris 7, Paris.

- Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico. II. Dal Settecento a oggi*, Einaudi, Torino.
- Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V. (1980), *Elementi di teoria delle funzioni e di Analisi funzionale*, Editori Riuniti, Roma.
- Laugwitz, B. (1995), *Bernhard Riemann 1826-1866, Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, Birkhäuser, Basel.
- Pier, J.-P. (1994), *Development of Mathematics 1900-1950*, Birkhäuser, Basel.
- Prodi, G. (1970), *Analisi matematica*, Boringhieri, Torino.
- Rudin, W. (1975), *Analisi reale e complessa*, Boringhieri, Torino.

Syllogismos.it

**History and Epistemology for Mathematics Education
(Giorgio T. Bagni, Editor)**
