In: Brunello, A. (Ed.), *Atti della Società Dante Alighieri a Treviso 1996-2002*. 353-358

Numeri e successioni: riflessioni metamatematiche, storiche e didattiche su di un brano leopardiano

GIORGIO TOMASO BAGNI

1. *Zibaldone di pensieri*, 28 novembre 1820

Scriveva il ventiduenne Giacomo Leopardi:

«L'uomo senza la cognizione di una favella, non può concepire l'idea di un numero determinato. Immaginatevi di contare trenta o quaranta pietre, senz'avere una denominazione da dare a ciascheduna, vale a dire, una, due, tre, fino all'ultima denominazione, cioè trenta o quaranta, la quale contiene la somma di tutte le pietre, e desta un'idea che può essere abbracciata tutta in uno stesso tempo dall'intelletto e dalla memoria, essendo complessiva ma definita ed intera. Voi nel detto caso, non mi saprete dire, né concepirete in nessun modo fra voi stesso la quantità precisa delle dette pietre; perché quando siete arrivato all'ultima, per sapere e concepire detta quantità, bisogna che l'intelletto concepisca, e la memoria abbia presenti in uno stesso momento tutti gl'individui di essa quantità, la qual cosa è impossibile all'uomo. Neanche giova l'aiuto dell'occhio, perché volendo sapere il numero di alcuni oggetti presenti, e non sapendo contarli, è necessaria la stessa operazione simultanea e individuale della memoria. E così se tu non sapessi fuorché una sola denominazione numerica, e contando non potessi dir altro che uno, uno, uno; per quanta attenzione vi ponessi, affine di raccogliere progressivamente coll'animo e la memoria, la somma precisa di queste unità, fino all'ultimo; tu saresti sempre nello stesso caso. Così se non sapessi altro che due denominazioni ecc. Eccetto una piccolissima quantità, come cinque o sei, che la memoria e l'intelletto può concepire senza favella, perché arriva ad aver presenti simultaneamente tutti i pochi individui di essa quantità... In genere l'idea precisa del numero, o coll'aiuto della favella o senza, non è mai istantanea, ma composta di successione, più o meno lunga, più o meno difficile, secondo la misura della quantità» (da *Zibaldone di pensieri*, 28 novembre 1820: Leopardi, 1969).

Questo brano suggerisce alcune riflessioni sul concetto di numero naturale.

Innanzitutto, appare evidente la centrale importanza che l'Autore attribuisce al linguaggio ([1]). Già dall'esordio («L'uomo senza la cognizione di una favella, non può concepire l'idea di un numero determinato»), infatti, Leopardi si riferisce esplicitamente al ruolo essenziale della denominazione dei singoli numeri naturali: è grazie alla «denominazione» che possiamo numerare gli elementi di un insieme finito (ovvero che possiamo identificare, progressivamente, i suoi sottoinsiemi di cardinalità crescente) fino a giungere all'indicazione della totalità (a fissare «un'idea che può essere abbracciata tutta in uno stesso tempo dall'intelletto e dalla memoria, essendo complessiva ma definita ed intera»).

Questa concezione numerica è dunque strettamente legata al conteggio, all'atto di enumerare: il ruolo della «favella» viene ad essere decisivo proprio in quanto consente lo svolgersi della corretta esecuzione pratica di tale atto («E così se tu non sapessi fuorché una sola denominazione numerica, e contando non potessi dir altro che uno, uno, uno...»). Leopardi, verso la fine del brano citato, riconosce chiaramente che il concetto stesso di numero, mediante (ed oltre) la successione delle «denominazioni», si lega inscindibilmente al conteggio («L'idea precisa del numero, o coll'aiuto della favella o senza, non è mai istantanea, ma composta di successione») (Borgato & Pepe, 1998).

Questa considerazione può essere modernamente ripresa ed approfondita con l'esame di alcune impostazioni dell'aritmetica, che come vedremo basano le proprie radici sull'introduzione ricorsiva.

2. Uno sguardo alla storia: l'impostazione assiomatica di Peano

Dal punto di vista storico, osserva N. Bourbaki:

«Prima del XIX secolo, pare non vi sia stato alcun tentativo di definire l'addizione e la moltiplicazione dei numeri naturali se non richiamandosi direttamente all'intuizione; Leibniz è il solo che, fedele ai propri principi, fa espressamente notare che delle "verità evidenti" come 2+2 = 4 sono anch'esse suscettibili di dimostrazione se si riflette sulle definizioni dei numeri che vi figurano; egli non riteneva affatto come scontata la commutatività dell'addizione e della moltiplicazione. Ma non spinge oltre le sue riflessioni a questo proposito, e, verso la metà del XIX secolo, nessun progresso si era ancora compiuto» (Bourbaki, 1963).

Con il lavoro *Sul concetto di numero* (1891), Giuseppe Peano (1858-1932), rielaborando alcune idee introdotte da Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) nello scritto *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888), propose un'introduzione assiomatica dell'aritmetica basata su tre concetti primitivi (l'*unità*, che in una seconda stesura fu sostituita con lo *zero*; il *numero*; il *successivo*) e su sei assiomi (definitivamente enunciati nel 1898 in *Aritmetica*, la II parte del II vol. del *Formulaire de mathematiques*: Peano, 1908, p. 27; Kennedy, 1983):

([1]) Vengono alla mente le recenti ricerche in ambito didattico che analizzano il ruolo del linguaggio; ad esempio: D'Amore, 1993; Maier, 1993a e 1993b.

Assioma zero. I numeri formano una classe ([2]).

Assioma I. Lo zero è un numero.

Assioma II. Se *a* è un numero, il suo successivo *a*+ è un numero.

Assioma III. Se *s* è una classe contenente lo zero e, per ogni a, se *a* appartiene a *s*, il successivo *a*+ appartiene a *s*,; allora ogni numero naturale è in *s* ("principio di induzione": si tratta in effetti di uno schema di assiomi: Chang & Keisler, 1973) ([3]).

Assioma IV. Se *a* e *b* sono due numeri e se i loro successivi *a*+, *b*+ sono uguali, allora *a* e *b* sono uguali.

Assioma V. Se *a* è un numero, il suo successivo *a*+ non è zero.

L'addizione secondo Peano si basa sulle due condizioni seguenti, date nella simbologia originale (Peano, 1908, p. 29):

Addizione I. Se *a* è un numero, $a+0 = a$.

Addizione II. Se *a* e *b* sono due numeri, $a+(b+) = (a+b)+$.

È evidente la stretta analogia che lega l'introduzione di Goodstein (presentata nel paragrafo precedente) a questa. Per induzione, quindi, Peano dimostra che se *a*, *b* sono numeri, anche $a+b$ è un numero (si veda: Peano, 1908; alcune dimostrazioni sono riportate in: Carruccio, 1972).

La relazione introdotta da Peano è un'applicazione: $a \to a+$ avente per dominio l'insieme dei numeri naturali e per codominio l'insieme dei numeri naturali non nulli, e che è una biiezione. Si può inoltre dimostrare che Peano introduce nell'insieme dei numeri naturali un ordine stretto ([4]).

([2]) Sulla necessità dell'Assioma zero si veda l'osservazione riportata nel peaniano *Formulario Mathematico*, (Peano, 1908, p. 27); notano a tale proposito B. D'Amore e M. Matteuzzi: «Il postulato *zero* ci spiega che possiamo applicare alla classe N_0 il calcolo delle classi *precedentemente* sviluppato» (D'Amore & Matteuzzi, 1975, p. 144). I termini *classe*, *uguale*, *minore* venivano definiti da Peano nel capitolo precedente.

([3]) Per quanto riguarda l'induzione, nota E. Carruccio: «Il principio di induzione matematica è usato, ma mai esplicitamente enunciato, da Euclide. Lo enunciò invece l'abate Maurolico (nel Rinascimento): ripreso da Dedekind, si ritrova alla base dell'aritmetica di Peano» (Carruccio, 1972, p. 8). Accenniamo appena alla necessità di impiegare con la massima cautela metodi induttivi nella pratica didattica. C. Marchini, esaminando alcune dimostrazioni poco rigorose tratte da libri di testo per la scuola secondaria, riscontra talvolta (purtroppo) la presenza di «quel metodo induttivo, dal particolare al generale, tanto severamente bollato da Popper» (Marchini, 1992, p. 100).

([4]) Applicando opportunamente gli assiomi, ed approntando le necessarie dimostrazioni, Peano giunse ad introdurre le operazioni aritmetiche con i numeri naturali, nonché a descrivere ed a dimostrare le loro proprietà formali. Osservano B. D'Amore e M. Matteuzzi: «In un libro di neppure 500 pagine, Peano è stato in grado di condensare la matematica pura ed applicata comprendendo tutte le teorie, dalla teoria dei numeri, all'algebra, alla geometria, all'analisi, alla meccanica pura ed applicata. Il linguaggio, dunque, si è rivelato veramente potente» (D'Amore & Matteuzzi, 1975, p. 148).

Possiamo dunque concludere che dall'impostazione peaniana, basata sull'applicazione che ad ogni numero naturale associa il suo successivo, emerge il ruolo essenziale del concetto di successione.

3. L'impostazione intuizionista: i numeri e il conteggio

Faremo quindi riferimento, in questo paragrafo, all'impostazione intuizionista dell'aritmetica ([5]) di R.L. Goodstein (1957). Impiegheremo i seguenti simboli:

N	operatore di conteggio
a, b, ..., l, ...	oggetti
a&b, a&b&c, ..., L, L&a, ...	insiemi di oggetti

Definiamo ricorsivamente l'atto del contare ([6]):

$$\mathrm{N}(l) = 1$$

$$\mathrm{N}(L\&l) = \mathrm{N}(l)+1$$

Sia S l'operatore che porta a considerare il successore (con Sx indicheremo cioè il successore di x).

L'usuale operazione di addizione:

$$(a;\, b) \to a+b$$

è definita ricorsivamente da:

$$x+0 = x$$

$$x+\mathrm{S}y = \mathrm{S}(x+y)$$

Ad esempio, per determinare 6+3 si procede nel modo seguente:

$$6+0 = 6$$

$$6+1 = 7$$

$$6+2 = (6+1)+1 = 7+1 = 8$$

$$6+3 = (6+2)+1 = 8+1 = 9$$

La moltiplicazione:

$$(a;\, b) \to \mathrm{F}_1(a;\, b) = a\cdot b$$

è definita ricorsivamente da:

$$\mathrm{F}_1(x;\, 0) = 0$$

([5]) Sull'intuizionismo indichiamo il classico lavoro: Heyting (1956).

([6]) Tra i molti lavori sull'introduzione logica della questione, indichiamo ad esempio: Chang & Keisler (1973); Bell & Machover (1977); Mendelson (1979).

$F_1(x;\ Sy) = x + F_1(x;\ y)$

È quindi possibile una definizione ricorsiva di altre operazioni. Per ogni n naturale, $n \geq 2$, definiamo ricorsivamente le operazioni:

$F_n(x;\ 0) = 1$

$F_n(x;\ Sy) = F_{n-1}[x;\ F_n(x;\ y)]$

Ad esempio, per $n = 2$ si ottiene la definizione ricorsiva di $F_2(a;\ b) = a^b$ (operazione di esponenziazione) ([7]):

$F_2(x;\ 0) = 1$

$F_2(x;\ Sy) = F_1[x;\ F_2(x;\ y)] = x \cdot x^y$

Per $n = 3$ si ottiene la definizione ricorsiva di un'operazione non usuale, che possiamo indicare mediante la posizione $F_3(a;\ b) = {}^{b}a$:

$F_3(x;\ 0) = 1$

$F_3(x;\ Sy) = F_2[x;\ F_2(x;\ y)] = ({}^{y}x)^x$

Risulta ad esempio:

$F_3(x;\ 1) = {}^{1}x = x$

$F_3(x;\ 2) = {}^{2}x = x^x$

$F_3(x;\ 1) = {}^{3}x = x^{x^x}$

4. Dall'aspetto storico a quello didattico

Un'esplicita attenzione alla concezione operativa, dunque, è alla base di alcuni importanti tentativi di formalizzazione dell'aritmetica. Un tale atteggiamento è costante nella storia della matematica, come rilevano F. Arzarello, L. Bazzini e G. Chiappini:

«Lo sviluppo del concetto di numero si può vedere come lo svolgimento di una catena di passaggi dalle concezioni operative a quelle strutturali. D'altra parte, anche prima che i processi generatori di nuovi numeri fossero considerati come oggetti, i matematici li usavano e li combinavano in operazioni» (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 9).

([7]) Osserviamo che l'introduzione di tali operazioni rende possibili alcune considerazioni di didattica dell'algebra elementare; ad esempio, è immediato verificare che il gruppo additivo $(\mathbf{Z};\ +)$ è isomorfo al gruppo $(\{x|x = e^z \wedge z \in \mathbf{Z}\};\ \cdot)$, dove la base è stata (tradizionalmente) indicata con e, base naturale dei logaritmi (si veda: Jacobson, 1974).

Concludiamo osservando che l'annotazione storica secondo la quale molto spesso l'aspetto operativo precede quello strutturale, assume una netta rilevanza in numerose questioni di didattica della matematica ([8]).

A. Sfard, in una nota ricerca (1991), dopo avere sottolineato la sostanziale astrazione che caratterizza la matematica ([9]), sottolinea la possibilità di concepire (e di presentare) parallelamente i contenuti matematici in termini strutturali (interpretandoli, dunque, come "oggetti") ed in termini operativi (interpretandoli, dunque, come "processi"):

«Saper vedere un'entità matematica come un oggetto significa essere capaci di riferirsi ad essa come ad una cosa reale, una struttura statica... e di manipolarla come un tutto... Interpretare una nozione come processo significa considerarla come entità potenziale piuttosto che attuale, che viene alla luce a fronte di una sequanza di azioni. Quindi, mentre la concezione strutturale è statica..., itananea e complessiva, quella operativa è dinamica, sequenziale e particolareggiata» (Sfard, 1991, p. 4).

La Sfard, inoltre, estende tale distinzione alle codifiche (e l'Autrice sembra qui riprendere idealmente le annotazioni di Leopardi precedentemente citate):

«Le codifiche verbali non possono essere colte 'a colpo d'occhio' e debbono essere elaborate sequenzialmente, dunque sembrano più adatte per presentare procedure di calcolo. In tal modo, la rappresentazione interna non iconica è più pertinente al modo di pensare operativo» (Sfard, 1991, p. 7, con riferimento a: Hadamard, 1949, p. 77).

Pur senza pretendere di esaurire un argomento assai profondo e delicato, anche dal punto di vista epistemologico, possiamo dunque concludere che l'introduzione operativa di molti concetti fondamentali della matematica (e, tra questi, degli elementi dell'aritmetica) è una questione particolarmente importante e dibattuta anche in ambito didattico.

([8]) Osserva Y. Chevallard: «Intellettualmente, per generazioni, l'aritmetica è stata il paradiso verde degli amori infantili, il latte e il miele dello spirito che si apre, per suo tramite, all'incanto di un'attività intellettuale riflessa, padroneggiata e felice... Così l'aritmetica, troppo bene appresa, veniva a fare da ostacolo intellettuale, affettivo e ideologico, al suo superamento» (Chevallard, 1989, p. 15, citato in: Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 15). Citiamo a tale riguardo anche G. Vergnaud, A. Cortes, e P. Favre-Ortigue: «L'algebra rappresenta per gli allievi un'importante rottura epistemologica rispetto all'aritmetica. Questa rottura merita un'analisi dettagliata, in quanto molti allievi non entrano facilmente nel gioco della manipolazione simbolica e di conseguenza si allontanano dalla matematica» (Vergnaud, Cortes & Favre-Ortigue, 1997, p. 253).

([9]) «Diversamente dagli oggetti materiali... le strutture della matematica superiore sono totalmente inaccessibili ai nostri sensi e possono essere viste solo con gli occhi della mente... Essere capaci di 'vedere' in qualche modo questi oggetti invisibili sembra essere una componente essenziale dell'abilità matematica» (Sfard, 1991, p. 3).

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F.; Bazzini, L. & Chiappini, G. (1994), *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*, Progetto strategico del CNR: Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 6.

Bell, J. & Machover, M. (1977), *A course in Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam.

Borgato, M.T. & Pepe, L. (1998), Leopardi e le scienze matematiche, *La matematica nella Società e nella Cultura, Bollettino UMI* (8) 1-A (1998), 31-37.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).

Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.

Chang, C.C. & Keisler, H.J. (1973), *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam.

Chevallard, Y. (1989), Arithmetique, algebre, modelisation: *Publications de l'IREM d'Aix-Marseille*.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1975), *Dal numero alla struttura*, Zanichelli, Bologna.

D'Amore, B. (1993), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico: *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.

Goodstein, R.L. (1957), *Recursive Number Theory*, North-Holland, Amsterdam.

Hadamard, J.S. (1949), *The psychology of invention in the mathematics field*, Princeton University Press, Princeton (NJ).

Heyting, A. (1956), *Intuitionism, an introduction*, North-Holland, Amsterdam.

Jacobson, N. (1974), *Basic Algebra I*, Freeman, San Francisco.

Kennedy, H. (1983), *Peano, storia di un matematico*, Boringhieri, Torino.

Leopardi, G. (1969), Zibaldone di pensieri: *Tutte le opere*, W. Binni, (a cura di), II, Sansoni, Firenze.

Maier, H. (1993a), Conflit entre language mathématique et langue quotidienne pour les élèves: *Cahier de didactique des mathématiques*, 3, 86-118 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1995, 298-305).

Maier, H. (1993b), Problemi di lingua e comunicazione durante le ore di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.

Marchini, C. (1992), Procedimenti dimostrativi presenti nei manuali scolastici: Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico del CNR: Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 13, 97-110.

Mendelson, E. (1979), *Introduction to mathematical logic*, Van Nostrand, Princeton (2nd edition).

Peano, G. (1908), *Formulario Mathematico*, Editio V, Fratres Bocca Editores, Torino (riproduzione in fac-simile dell'edizione originale con introduzione di U. Cassina, Cremonese, Roma 1960).

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins: *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Vergnaud, G.; Cortes, A. & Favre-Ortigue, P. (1997), Introduzione dell'algebra ai principianti "deboli": problemi epistemologici e didattici: *La matematica e la sua didattica*, 3, 253-271 (*Actes du Colloque de Sèvres: Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 1987, 259-279).

❋❋❋