Συλλογισμός
Syllogismos
History and Epistemology for Mathematics Education
Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Libri e idee *(a cura di G.T. Bagni)*
Appunti di storia per la didattica della matematica

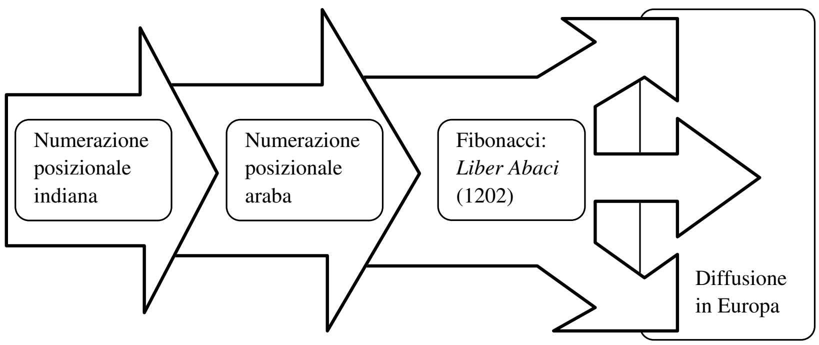
Capitolo 1
L’esordio: l’*Aritmetica di Treviso*

1.1. Uno sguardo alla storia dell’Aritmetica

1.1.1. I manuali medievali di Aritmetica pratica

L’Aritmetica è, con la Geometria, la forma più antica di attività matematica. Osserva G. Loria che “le transazioni commerciali fra individui e fra popoli differenti, conseguenze inevitabili dell’umano consorzio, e, d’altro lato, l’aspirazione di sottoporre a misura l’universo dei fenomeni di cui il mondo è teatro e il genere umano spettatore, nella segreta speranza di determinarne il meccanismo e scoprirne le forze motrici, condussero, con un irresistibile imperativo categorico, l’uomo, non appena uscito dallo stato di barbarie, a foggiarsi tanto un’embrionale Geometria quanto un’infantile Aritmetica” (Loria, 1929-1933, p. 1).

Sarebbe dunque lungo ripercorrere completamente la storia dell'Aritmetica (rinviamo a: Rouse Ball, 1927; Picutti, 1977; Struik, 1981; Ifrah, 1989; Kline 1982, 1985 e 1991). Ci limitiamo a notare che nel Medioevo, anche prima dell'introduzione della stampa a caratteri mobili, furono resi pubblici numerosi manuali di Aritmetica: tra di essi il celebre *Liber Abaci* di Fibonacci (Leonardo da Pisa, 1180?-1250)[1], pubblicato nel 1202[2].



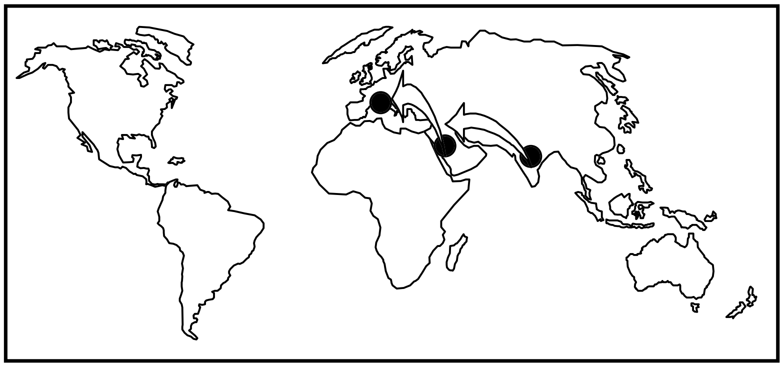
A Fibonacci (l'attualità del matematico pisano è testimoniata da molti studi moderni: Vorobiev, 2002) viene spesso ricondotta l'introduzione in Europa della notazione posizionale indo-araba, in sostituzione della scomoda notazione romana[3].

---

[1] "Leonardo Pisano compose le opere seguenti: 1. Un trattato d'Aritmetica e d'Algebra intitolato *Liber Abbaci*. 2. Un trattato di Geometria teorica e pratica intitolato *Practica Geometriae*. 3. Un trattato de' numeri quadrati intitolato *Liber quadratorum*. 4. Un'opera intitolata *Flos super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et ad Geometriam, vel ad utrumque pertinentium*. 5. Un opuscolo *De modo solvendi quaestiones avium et similium*. 6. Un commento sul decimo libro degli *Elementi* di Euclide. 7. Un'opera intitolata *Libro di merchatanti detto di minor guisa*" (Boncompagni, 1854a, pp. 248-249). Sulla vita e sull'attività di Fibonacci: Boncompagni, 1854b.

[2] Il *Liber Abaci* fu riedito nel 1228; sarà pubblicato a stampa solo nel XIX secolo.

[3] "Ecco un tratto della spiegazione che dà Leonardo circa l'uso di tali cifre: 'Et ut hoc quod dictum est lucidius declarescat, ipsum cum *figuris* (le *cifre*) ostendatur... Si *figura* quaternarii fuerit in primo (gradu) et unitatis in secundo sic 14, nimirum .XIIII.



Matematica greca

212 a.C.: Roma conquista Siracusa; morte di Archimede

Matematica romana (pressoché insignificante; tuttavia si mantiene viva la tradizione ellenistica)

(524: morte di Boezio)

Collegamento: Matematica araba

1202: pubblicazione del "Liber Abaci" di Fibonacci

Sviluppo della Matematica nell'Europa occidentale: dal Medioevo ai giorni nostri

2000: ...

---

denotabunt; vel si figura unitatis fuerit in primo, et quaternarii in secundo sic 41, denotabunt XLI...” (*Liber Abaci*,Cap. I, pag. 3). È ben notevole che Leonardo tenga la parola *numeri* per denotare le quantità significate colle lettere romane, chiamando *figure* le quantità medesime significate colle nuove cifre, le quali così non formavano il numero, ma lo rappresentavano o figuravano” (Veratti, 1860, pp. 36-37. Inoltre: Bottazzini; Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 22).

1.1.2. Il primo libro di Matematica stampato al mondo

Fu verso la fine del XV secolo che l'invenzione della stampa determinò il diffondersi di molti manuali di Aritmetica: ventidue anni dopo la pubblicazione della *Bibbia* di Gutenberg (1456), vide la luce a Treviso il primo libro di Matematica a stampa pubblicato al mondo, *Larte de labbacho*, un manuale anonimo noto come l'*Aritmetica di Treviso* (si veda la riedizione anastatica dell'incunabolo: Romano, 1969).

Non ci occuperemo delle questioni di priorità, peraltro non sempre motivate, riguardanti il manuale[4]. Gli studiosi concordano nell'accettare il 10 dicembre 1478 (come riportato nell'ultima carta dell'incunabolo) quale data di pubblicazione. Qualche discordanza emerge per quanto riguarda lo stampatore, che secondo alcuni sarebbe il fiammingo Gerardo da Lisa (Rhodes, 1983; Bortolato & Contò, 1985)[5], secondo altri Michele Manzolo, detto Manzolino (Federici, 1805; D'Acais & Porro, 1969; Romano, 1969; Picutti, 1977). Il capoluogo della Marca nel XV secolo poteva vantare, nel settore editoriale, una robusta tradizione artigianale: centocinquant'anni prima della pubblicazione de *Larte de labbacho*, Pace da Fabriano, indicato quale inventore della carta di lino, si stabilì nella città veneta (Michieli, 1958; G. Romano, nella presentazione della ristampa anastatica de *Larte de*

[4] Una segnalazione di G. Libri sull'opuscolo *Ars Numerandi* che sarebbe stato stampato nel 1471 è riportata in: Deschamp & Brunet, 1878, ma non ci sono prove certe dell'esistenza di tale opuscolo. Pochi anni dopo la pubblicazione de *Larte de labbacho*, altri manuali di Aritmetica pratica furono stampati in varie località europee: nel 1483, a Bamberg (Baviera) venne stampato un manuale dovuto ad Ulrico Wagner; nello stesso anno fu pubblicato a Padova l'*Algorismi tractatus* di Prosdocimo Beldomandi, e l'anno seguente un manuale di Pietro Borghi venne stampato a Venezia.

[5] La data 1479 riportata nell'interessante articolo (Bortolato & Contò, 1985), è dovuta ad un refuso editoriale (Bortolato, *comunicazione privata all'Autore*).

labbacho, ricorda che sedici erano le tipografie operanti in Treviso nella seconda metà del XV secolo: Romano, 1969)[6].

Un particolare conferma il ruolo di primo piano assunto dalla tipografia nella diffusione della cultura scientifica del periodo: alcune considerazioni sulle fasi lunari, riportate ne *Larte de labbacho*, sono riferite al "decembrio del 1478": ciò fa pensare che la stesura degli ultimi capitoli avvenne pressoché contemporaneamente alla stampa delle prime sezioni del libro (10 dicembre 1478).

Larte de labbacho è un manuale costituito da sessantadue pagine non numerate[7] ed è dedicato "a ciascheduno che vuole usare larte de la merchadantia chiamata vulgarmente larte de labbacho": l'imp ostazione didattica appare chiara; i numerosi esempî sono adeguatamente calibrati per difficoltà. Nella sezione seguente analizzeremo la struttura del lavoro, che si rivela interessante anche per lo studioso contemporaneo.

1.2. La struttura de *Larte de labbacho*

1.2.1. Le definizioni

Interessante ne *Larte de labbacho* è il ruolo delle definizioni dei principali concetti e delle operazioni. Il numero è così introdotto:

"Numero e una moltitudine congregata overo insembrada da molte unitade. et almeno da do unitade. come e .2. el quale e lo primo e menore numero: che se truova. La

[6] Si veda inoltre il *Catalogo dei libri stampati a Treviso nel secolo XV, disposti per ordine d'anni, giuntivi alcuni di stampatori trevigiani altrove impressi*, di F.S. Fapanni, Treviso, Biblioteca Comunale, manoscritto n. 1662.

[7] La numerazione delle pagine dell'esemplare conservato nella Biblioteca Capitolare di Treviso non è originale; altri esemplari, come quello della Biblioteca Universitaria di Bologna, non hanno le pagine numerate.

unitade e quella cosa: da la quale ogni cosa si ditta una" (carta di testo n. 1 retto).

La distinzione dei numeri in *semplici*, *articuli* e *misti* sembra motivata da esigenze collegate all'esecuzione pratica delle operazioni (in particolare della moltiplicazione e della divisione):

"Se truova numeri de tre maniere. El primo se chiama numero simplice. laltro numero articulo. El terzo se chiama numero composito overo misto. Numero simplice e ogni numero: chi presenta manco de diece. e si presentato per una sola figura. come 1.2.3. etc. Numero articulo e ogni quello: el quale se puo partire in diece parte eguale in modo che niente soperavanza da quello. come sono 10.20.30. e simili numeri. Numero misto e quello: del quale el suo valore presenta piu de diece: ma lo so valore non puo fir partito in diece parte eguale senza soperavanzo. come .11.12.13. etc." (carta di testo n. 1 retto e rovescio).

L'Autore presenta poi i cinque *atti* fondamentali della pratica aritmetica:

"Cinque sono gli atti: li quali besogna sapere a chi vuol intendere la fine di questa prattica. zoe. Numerare. Iongere. Cavare. Moltiplicare. e Partire" (carta di testo n. 1 rovescio).

Molta cura viene riservata alla presentazione della numerazione:

"Numeratione adoncha e de ciaschaduno numero per le soe figure conveniente artificiosa representatione. la quale se fa con diece lettere overo figure. zoe sono queste. .1.2.3.4.5.6.7.8.9.0. De le quale la prima figura .zoe .1. non e chiamato numero: ma ben e principio de numeri. E la decima figura. zoe .0. se chiama cifra o vero nulla .zoe.

figura de niente perche in se niente leva: ma ioncta a le altre figure: fa crescere il loro valore. Nota adoncha bene. che quando tu truovi una figura sola: il suo valore de quella non puo passare nove. zoe .9." (carta di testo n. 1 rovescio).

1.2.2. Le operazioni

Ne *Larte de labbacho* non compaiono i segni con i quali, modernamente, sono indicate le operazioni aritmetiche, in quanto, rispetto alla data di pubblicazione del manuale trevigiano (1478), l'introduzione di tali segni è più tarda [8] (Tahta, 1985). Le operazioni aritmetiche sono così denominate:

- "iongere" (sommare), con la parola "et";
- "levare, c avare" (sottrarre), con "de";
- "moltiplicare", con "fia";
- "partire" (dividere), con "in".

Per ogni operazione, l'Autore indica:

- una definizione (descrizione in linguaggio naturale);
- quanti numeri sono necessari per l'operazione;
- eventuali condizioni da imporre a tali numeri;
- le modalità di esecuzione pratica.

L'addizione è così presentata:

"Per intendimento del secondo atto .zoe. del iongere: sapi che iongere e una assonanza de piu figure et a mancha de do... E nota che nel atto de iongere do numeri al mancho sono necessarii .zoe. lo numero al qual de fir ionto laltro: el quale die esser mazore. et el numero: che de fir ionto a quello: lo quale die esser minore. per che sempre e da

---

[8] I segni di addizione e di sottrazione furono introdotti nel 1489, da G. Widmann; quello di uguaglianza nel 1557 da R. Recorde; quello di moltiplicazione nel 1631 e quello di divisione nel 1657, da G. Oughtred (Rouse Ball, 1927; Bagni, 1994b).

iongere el menor numero al mazore" (carte di testo n. 3 rovescio e 4 retto).

L'Autore però precisa che quanto ora indicato "e piu conveniente che fare el contrario" e che "sel se fara a quel modo overo al contrario: sempre nascera una medesima cosa" (carta di testo n. 4 retto). Dunque viene esplicitamente riconosciuta la proprietà commutativa dell'addizione. La sottrazione è così presentata:

"Latto de cavare non e altro: che de do numeri... trovare quanto resta de lo menore al mazore acio chel se possa cognoscere quel resto" (carta di testo n. 9 retto e rovescio).

Dopo avere esplicitamente osservato che "nel cavare... sono do numeri necessarii .zoe. el numero dal qual si cavato: el numero che fi cavato da quello" e che "mazor da menore non può fir cavato" (carta di testo n. 9 rovescio), l'Autore riconosce la sottrazione come operazione inversa dell'addizione ("Torna al atto de iongere e provaralo per latto de cavare": carta di testo n. 10 rovescio). La moltiplicazione è così presentata:

"Attendi lettore al quarto atto .zoe. al moltiplicare. Per intelligentia del quale el e de savere. che moltiplicare uno numero... per uno altro: non e altro: che de do numeri propositi: trovare uno terzo numero: el quale tante volte contien uno de quelli numeri: quante unitade sono nel altro... Intendi bene. che nella moltiplicatione sono principalmente do numeri necessarii .zoe el numero moltiplicatore et el numero de fir moltiplicato" (carta di testo n. 14, retto).

Analogamente a quanto fatto per l'addizione, anche per la moltiplicazione si suggerisce di considerare come primo fattore il maggiore dei due fattori; ma viene poi esplicitamente riconosciuta la proprietà commutativa della moltiplicazione (carta di testo n. 14 retto e rovescio). La divisione è presentata come operazione inversa della moltiplicazione:

"Partire e de do numeri propositi: trovare uno terzo numero: el quale se trova tante volte nel mazore: quante unitade sono nel menore. el quale tu troverai: se tu guarda quante fiade el menore numero se trova nel mazore" (carta di testo n. 22 rovescio).

L'Autore annota:

"E da notare che nel partire sono tre numeri necessarii .zoe. el numero che de fir partito: el partitore: e la parte" (carta di testo n. 22 rovescio).

"Chel numero che de fir partito sempre de essere mazore: o vero al mancho eguale al partitore. E quando quelli sono eguali sempre nasce .1. per parte" (carta di testo n. 23 retto).

Riassumiamo le osservazioni sulle quattro operazioni:

Operazione	Numeri necessari	Condizioni
Addizione	Sono necessari (almeno) due addendi. Non viene ricordata esplicitamente la somma.	È opportuno che il primo addendo sia maggiore del secondo, ma viene riconosciuta la proprietà commutativa.
Sottrazione	Sono necessari due numeri, il minuendo e il sottraendo.	Il minuendo deve essere non minore del sottraendo.
Moltiplicazione	Sono necessari (almeno) due fattori.	È opportuno che il primo fattore sia maggiore del secondo, ma viene riconosciuta la proprietà commutativa.

Divisione	Sono necessari tre numeri: il dividendo, il divisore e il quoziente.	Il dividendo deve essere non minore del divisore.

L'Autore dunque sottolinea con cura che le operazioni introdotte sono binarie (il riferimento ai "tre numeri necessarii .zoe. el numero che de fir partito: el partitore: e la parte", nella carta di testo n. 22 rovescio, sembra dovuto ad una svista: è l'unico caso in cui viene considerato anche il risultato tra i "numeri necessarii" all'esecuzione dell'operazione in esame); è interessante interpretare le condizioni indicate per rendere possibili tali operazioni.

Per quanto riguarda l'addizione (e la moltiplicazione), viene riconosciuta la proprietà commutativa, ma si suggerisce di considerare gli addendi (ed i fattori) in ordine decrescente, per motivi pratici. Nella sottrazione si richiede che il minuendo sia non maggiore del sottraendo per evitare risultati negativi. Nella divisione la condizione enunciata mira ad escludere i casi con il quoziente nullo.

Esamineremo brevemente alcuni procedimenti pratici indicati nel manuale.

1.3. Le operazioni ne *Larte de labbacho*

1.3.1. Il metodo pratico di sottrazione

Il metodo pratico di sottrazione presentato ne *Larte de labbacho* si differenzia in modo significativo da quello diffuso ai giorni nostri (Bagni, 1994a). Per descrivere l'esecuzione di 452 -348, l'anonimo Autore scrive:

".8. de .2. non se puo cavare: ma .2. me compie .10. quel .2. che te ha compi el to .10. tu die iongere a laltro .2. che sora .8. dicendo .2. e .2. fa .4. el qual tu die scrivere per resto sotto quel .8. con questa conditione: che a la figura seguente al .8. zoe al .4. tu die iongere .1." (carta di testo n. 10 retto).

Dal punto di vista dell'utilità pratica, il procedimento de *Larte de labbacho* (che non prevede il "prestito" tra le cifre del minuendo) appare talvolta più agevole rispetto al procedimento oggi usato. Consideriamo un esempio:

```
1 0 0 4 -
  8 2 6 =

  1 7 8
```

Il procedimento oggi diffuso (del "prestito" tra le cifre del minuendo) può comportare difficoltà; l'esecuzione di 4-6 non è possibile e la necessità di prendere in "prestito" una decina per eseguire 14-6 può apparire delicata: la più vicina cifra non nulla si trova tre cifre a sinistra del 4. I "prestiti" devono avvenire ripetutamente, e devono essere tutti tenuti ben chiari in mente (la sequenza 1.0.0.4 diviene: 0.9.9.14): tutto ciò potrebbe essere causa di imbarazzo per l'esecutore (Bagni, 1995).

Il procedimento descritto ne *Larte de labbacho* si rivela più semplice: per "salire da" 6 a 14 (giacché da 6 a 4 non è possibile) si scrive 8 e si aumenta il 2 (seconda cifra da destra del sottraendo) di 1, ottenendo 3; da 3 a 10 (giacché da 3 a 0 non è possibile) si scrive 7 e si aumenta la cifra 8 di 1, ottenendo 9. Infine: 10-9 = 1, e l'operazione è conclusa. Non è dunque necessaria la lunga sequenza delle "prese in prestito" e l'esecuzione appare meno insidiosa.

1.3.2. I metodi pratici di sottrazione nei manuali di Aritmetica pratica

Cenni al metodo di sottrazione ora segnalato si trovano in molte pubblicazioni fino al XX secolo. Ne proponiamo una breve rassegna (Bagni, 1994a):

- Clavio, 1738. L’Autore descrive innanzitutto il procedimento di sottrazione con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo (“che cosa ha da farsi quando la figura inferiore è maggiore della superiore”: Clavio, 1738, pp. 17-20); quindi enuncia una “più facil regola di sottrarre quando la figura inferiore è maggiore della superiore” (Clavio, 1738, pp. 20-24):

ARITMETICA
PRATTICA
Composta dal molto R. P.
CRISTOFORO
CLAVIO
BAMBERGENSE
Della Compagnia di GESU'.
E tradotta dal Latino in Italiano
DAL SIGNOR
LORENZO CASTELLANO
Patrizio Romano.
Rivista dal medesimo P. CLAVIO
con alcune aggiunte.

IN VENEZIA, MDCCXXXVIII.
Per Bonifacio Viezzeri.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

L’*Aritmetica* di Clavio pubblicata a Venezia nel 1738

“Questa regola ch’abbiam detto, è usata da molti Aritmetici, ma noi molto più facilmente così l’insegneremo. Quando la figura inferiore è maggior della superiore, piglisi la differenza che è tra essa, e il 10, e a questa differenza s'aggionga la figura superiore, dalla quale la sottrazzione non si può fare, e tutta la somma si scriva sotto la linea, perché questa somma avanzerebbe, se quella figura maggiore si levasse dal numero composto dal 10 e da quella figura superiore, dalla quale non si può fare la sottrazzione, non altrimente, che se fosse pigliata l'unità in presto... Doppo questo acciò non siamo sforzati di levare con l'imaginazione l'unità dalla figura superiore, dalla quale è stata virtualmente l'unità pigliata in presto, aggiongeremo alla figura inferiore, che prossimamente verso la parte sinistra segue, una unità, e questa somma dalla figura superiore (senza levar prima da essa alcuna unità) sottrarremo" (Clavio, 1738, pp. 20-21).

- Morel, 1742. Nell'opera *L'arithmétique raisonnée* (Desaint-Saillant, Paris 1742) l'Autore descrive (e giustifica) il procedimento di sottrazione con l'incremento delle cifre del sottraendo:

"Pour ôter du nombre	A	1 2 3 0 5
le nombre	B	6 7 2 9
& en trouver la différence	Z	5 5 7 6

Avant que de faire cette opération, remarqués que la différence des nombres A & B sera toujours la même, si on ajoûte à A & à B des nombres égaux, par exemple, si lorsqu'on ajoute dix, cent, mille, &c. au nombre A, on ajoûte les mêmes dix, cent, mille, &c. au nombre B: 12 ôtés de 14, reste 2: ajoûtes 10 à 12 & à 14, vous aurez 22 & 24: 22 ôtés de 24, reste aussi 2: ajoûtes 100 à 22 & à 24, vous aurez 122 & 124, dont la différence est aussi 2, &c. Pour ôter donc B de A, je commence toujours par les unités, & je dis: 9 ôtés de 5, je ne puis; j'aioûte aussi 1 dixaine aux unités 5 de A, & j'aurai 15, j'aioûte aussi une dixaine aux dixaines 2 de B, & j'aurai 3 dixaines; puis je dis: 9 ôtes de

15, reste 6; je pose 6 sous la ligne au rang des unités”[9] (Morel, 1742, pp. 21-22).


L'ARITHMÉTIQUE

RAISONNÉE

Par M. l'Abbé MOREL.

50 sols relié.

A PARIS,

Chez JEAN DESAINT & CHARLES SAILLANT, Libraires, rue Saint Jean-de-Beauvais.

M. DCC. XLII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

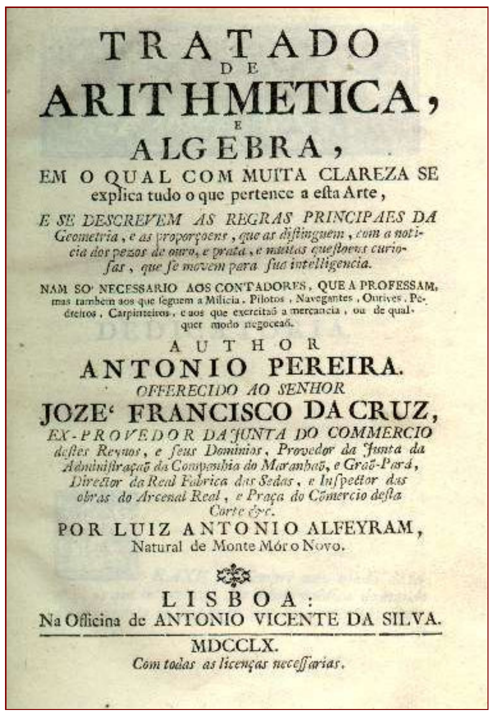
***L'arithmétique raisonnée* di Morel pubblicata a Parigi nel 1742**

- Pereira, 1760. Nella prima parte del Capitolo III, intitolata “Do Diminuir” (Pereira, 1760, pp. 7 -11), l'Autore

[9] “Per togliere dal numero A 12305 il numero B 6729 e trovare la differenza Z 5576. Prima di fare questa operazione, si ricordi che la differenza dei numeri A e B sarà sempre la stessa, se aggiungiamo ad A ed a B dei numeri uguali, per esempio se quando aggiungiamo dieci, cento, mille ecc. al numero A, aggiungiamo gli stessi dieci, cento, mille ecc. al numero B: 12 tolto da 14, resta 2: aggiungendo 10 a 12 ed a 14 avrete 22 e 24: 22 tolto da 24, resta ancora 2: aggiungendo 100 a 22 ed a 24 avrete 122 e 124, tra i quali la differenza è ancora 2 ecc. Per togliere dunque B da A, comincio sempre dalle unità e dico: 9 tolto da 5, non posso; aggiungo allora 1 decina alle 5 unità di A ed ottengo 15, aggiungo anche una decina alle 2 decine di B ed ottendo 3 decine; poi dico: 9 tolto da 15, resta 6; pongo 6 sotto la linea al posto delle unità”.

descrive il procedimento di sottrazione con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo; nella seconda parte, intitolata "Outro modo de Diminuir" (Pereira, 1760, pp. 11-12), annota:

"Quando a letra de cima he mayor, ou igual com a debaixo, restamos huma da outra... Porèm quando a debaixo he mayor que a de cima, accrescentamos-lhe 10 fem os pedir emprestados, e dizemos: vay 1, que accrescentamos a outra letra a debaixo, que se segue"[10] (Pereira, 1760, p. 11).



TRATADO
DE
ARITHMETICA,
E
ALGEBRA,
EM O QUAL COM MUITA CLAREZA SE explica tudo o que pertence a esta Arte,

E SE DESCREVEM AS REGRAS PRINCIPAES DA Geometria, e as proporçoens, que as distinguem, com a noticia dos pezos de ouro, e prata, e muitas questoens curiosas, que se movem para sua intelligencia.

NAM SO' NECESSARIO AOS CONTADORES, QUE A PROFESSAM, mas tambem aos que seguem a Milicia, Pilotos, Navegantes, Ourives, Pedreiros, Carpinteiros, e aos que exercitaõ a mercancia, ou de qualquer modo negoceaõ.

AUTHOR
ANTONIO PEREIRA.
OFFERECIDO AO SENHOR
JOZE' FRANCISCO DA CRUZ,
EX-PROVEDOR DA JUNTA DO COMMERCIO destes Reynos, e seus Dominios, Provedor da Junta da Administraçaõ da Companhia do Maranhaõ, e Graõ-Pará, Director da Real Fabrica das Sedas, e Inspector das obras do Arcenal Real, e Praça do Cõmercio desta Corte &c.
POR LUIZ ANTONIO ALFEYRAM,
Natural de Monte Mór o Novo.

LISBOA:
Na Officina de ANTONIO VICENTE DA SILVA.
MDCCLX.
Com todas as licenças necessarias.

Il *Tratado de arithmetica e algebra* di Pereira (Lisbona, 1760)

[10] "Quando la cifra superiore è maggiore o uguale a quella inferiore, procediamo come nell'altro caso... Quando la cifra inferiore è maggiore della superiore, accresciamola fino a 10 e diciamo: riporto 1, unità con la quale aumentiamo l'altra cifra inferiore, collocata a lato della cifra in esame".

- Paulini a S. Josepho (P. Chelucci), 1767 e 1786. Nel Capitolo 1, "Propositio IV. De Subtractione Integrorum" (Paulini a S. Josepho, 1767, pp. 11-13), l'Autore descrive entrambi i metodi e di essi sottolinea esplicitamente l'equivalenza:

"Si quis numerus inferior subduci non potest a superiori, quia illo major est, intelligatur addita numero ipsi superiori decas, factaque subtractione, ponatur residuum infra lineam: sed deinde numerus superior, qui sequitur, unitate minuitur, vel (idem enim est) subsequens numerus inferior augetur unitate" (Chelucci, 1767, p. 11).

- Marie, 1796. L'Autore del diffuso manuale, dopo avere dettagliatamente descritto il procedimento di sottrazione con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo, annota:

"La sottrazione si fa anche in un altro modo che useremo nella divisione. Per sottrarre 2964 da 4571 si dirà: dalla cifra inferiore 4 non può andarsi alla superiore 1 che è più piccola, ma andando a 11, la differenza è 7 che scrivo, e porto 1 perché sono andato a 11: parimente da 6, +1 (= 7) andando a 7, la differenza è 0 che scrivo: quindi da 9 non può andarsi a 5, ma andando a 15, la differenza è 6 che scrivo, e porto 1: infine da 2, +1 (= 3) andando a 4, la differenza è 1 che scrivo; e il resto totale è 1607" (Marie, 1796, pp. 6-7).

- Brunacci, 1820. Riporta esattamente (Brunacci, 1820, p. 9) l'esempio presente in Marie (1796), utilizzando le stesse parole di commento:

"La sottrazione si fa anche in un altro modo. Per sottrarre 2964 da 4571 si dirà: dalla cifra inferiore 4 non può andarsi alla superiore 1 che è più piccola, ma andando a 11, la differenza è 7 che scrivo, e porto 1 perché sono andato a 11:

parimente da 6, +1 (=7) andando a 7, la differenza è 0 che scrivo: quindi da 9 non può andarsi a 5, m andando a 15, la differenza è 6 che scrivo, e porto 1: infine da 2, +1 (=3) andando a 4, la differenza è 1 che scrivo; e il resto è 1607" (Brunacci, 1820, p. 9).

- Francoeur, 1843. In "Della sottrazione" (Francoeur, 1843, pp. 9-14), l'Autore introduce direttamente il procedimento per la sottrazione con l'incremento della cifra del sottraendo:

"In generale, quando la cifra superiore sarà la minore, dovrà essa aumentarsi di dieci, ritenendo un'unità per aggiungerla alla cifra inferiore che succede immediatamente a sinistra. Si osserverà che in tal modo il numero superiore viene aumentato di 10, ma che nel tempo stesso viene parimente aumentato di 10 il numero inferiore, il che non altera punto la differenza" (Francoeur, 1843, p. 12).

- Bourdon, 1861. L'argomento viene trattato nella sezione "Della sottrazione" (Bourdon, 1861, pp. 13-17); innanzitutto, l'Autore introduce il procedimento di sottrazione con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo; quindi, afferma:

"È chiaro che invece di diminuire di una unità la cifra dalla quale si è tolta una unità, si può lasciare questa cifra tal quale si trova, purché si aumenti di una unità la cifra inferiore corrispondente. Questa maniera di operare è generalmente più comoda in pratica" (Bourdon, 1861, p. 16).

- Pincherle, 1920. Si tratta di un libro di testo per le scuole secondarie inferiori; l'Autore, nel paragrafo 25, introduce direttamente il procedimento per la sottrazione con l'incremento della cifra del sottraendo:

"Il sottraendo si scrive sotto il diminuendo, avendo cura di porre le unità del medesimo ordine in una stessa colonna verticale. L'operazione si comincia dalla destra. Se si può, si sottrae ogni cifra del sottraendo dalla corrispondente del diminuendo; se non si può (per essere la cifra del sottraendo maggiore della corrispondente del diminuendo) si aggiunge 10 alla cifra del diminuendo ed 1 alla cifra immediatamente a sinistra nel sottraendo" (Pincherle, 1920, p. 22).

Il procedimento di sottrazione con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo viene descritto dall'Autore solo alla fine del paragrafo:

"Da molti viene anche usato il seguente modo di procedere... Se si può, si sottrae ogni cifra del sottraendo dalla corrispondente del diminuendo; se non si può (per essere la cifra del sottraendo maggiore della corrispondente del diminuendo) si aggiunge 10 alla cifra del diminuendo e si diminuisce di 1 la prima cifra significativa a sinistra di quella del diminuendo stesso; essendovi zeri intermedi, si sostituiscono con altrettanti nove" (Pincherle, 1920, p. 23).

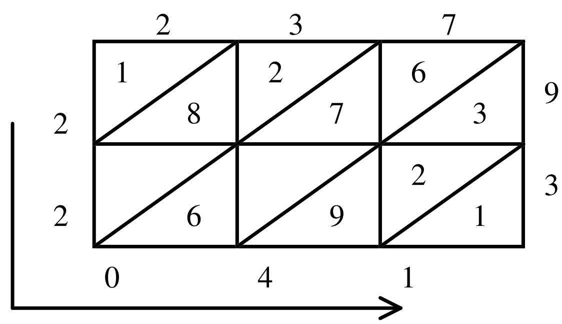
Possiamo concludere che il metodo pratico di sottrazione che si trova ne *Larte de labbacho* (ma noto anche prima della pubblicazione del manuale) trova eco nelle pubblicazioni a sfondo didattico fino al XX secolo. La sua semplicità lo rende in alcuni casi preferibile al procedimento con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo; ma la sua giustificazione teorica rende necessario il riferimento alla proprietà invariantiva (Bagni, 1994a).

1.3.3. La moltiplicazione per graticola

La moltiplicazione, ne *Larte de labbacho*, è riferita ad alcuni metodi pratici; tra questi, presenteremo quello detto “per graticola” (o “moltiplicazione fulminea”, o “a gelosia”, o “a reticolo”), noto agli Arabi e probabilmente agli Indiani.

Moltiplicando e moltiplicatore devono essere scritti ai lati di una tabella rettangolare, all’interno della quale vengono disposti i prodotti parziali (si veda l’esempio riportato di seguito). Il risultato finale si ottiene sommando diagonalmente quanto scritto nelle caselle, considerando gli eventuali riporti, e può essere letto ai lati della tabella nei quali non sono scritti i fattori.

Riportiamo la moltiplicazione 237 x 93 = 22041:



Il risultato (22041) si legge a sinistra e al di sotto della tabella allineando le cifre in senso antiorario[11].

1.3.4. La divisione per battello

La divisione “per battello” si basa su di un procedimento apparentemente complicato, ma assai diffuso nel Medioevo; nel Seicento essa sarà sostituita definitivamente dal metodo utilizzato ai giorni nostri (“divisione per danda”).

Illustriamo la divisione per battello attraverso l’esempio 51411 : 324 = 158 (con resto 219).

---

[11] Sottolineiamo che la moltiplicazione “per graticola” non può essere eseguita in notazione additiva. Ne *Larte de labbacho* la notazione numerica posizionale è un caposaldo dell’intera trattazione.

(dividendo) 5 1 4 1 1 |
(divisore) 3 2 4

Si determina, quindi, la prima cifra del quoziente (che è 1) e si scrive, sopra il dividendo, il primo "resto parziale": esso si ricava, cominciando da sinistra, moltiplicando 3x1 = 3 e scrivendo 2 = 5-3 sopra la cifra 5.

Quindi, si calcola 2x1 = 2 e si scrive 9 = 11-2 sopra la cifra 1; la decina "presa in prestito" deve essere tolta dal 2 (prima cifra del "resto"), per cui nella riga superiore dovrà essere scritto 1 (2-1) sopra la cifra 2. Si calcola infine 4x1 = 4 e si scrive 0 = 4-4 sopra la cifra 4. Il "resto parziale" individuato è dunque 190 (ogni cifra "utilizzata" veniva cancellata con un tratto di penna).

1
~~2~~ 9 0
~~5~~ ~~1~~ ~~4~~ 1 1 | 1
~~3~~ ~~2~~ ~~4~~

Il divisore (324) viene quindi riscritto al di sotto dello schema, spostato verso destra di una posizione ed in modo da occupare le posizioni eventualmente libere nelle righe superiori. Si ripete quindi l'operazione precedente dividendo il numero 19011 (che può essere letto nella parte superiore dello schema) per il divisore, 324: la seconda cifra del quoziente è dunque 0.

2
~~3~~ 8
~~1~~ 4 ~~0~~
~~2~~ ~~9~~ ~~0~~ 0
~~5~~ ~~1~~ 4 ~~1~~ 1 | 1 5
~~3~~ ~~2~~ 4 4
~~3~~ ~~2~~

Si completa infine lo schema determinando la terza (ultima) cifra del quoziente: 8.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 2 & & & & \\
 & \cancel{2} & 4 & & & & \\
 & \cancel{3} & \cancel{8} & 1 & & & \\
\cancel{1} & 4 & \cancel{0} & 4 & & & \\
\cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{0} & \cancel{0} & 9 & & \\
\cancel{5} & \cancel{1} & 4 & \cancel{1} & \cancel{1} & | & 1\,5\,8 \\
\cancel{3} & \cancel{2} & 4 & 4 & 4 & & \\
 & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{2} & & & \\
 & & \cancel{3} & & & &
\end{array}
$$

Il risultato dell'operazione è quindi 158 ed il resto, 219, può essere letto nella parte superiore dello schema completato.

Sottolineiamo infine che il valore de *Larte de labbacho* non va ricercato nell'importanza o nell'originalità dei procedimenti presentati; il manuale non si discosta infatti dalla scia tracciata, quasi tre secoli prima, dal *Liber Abaci*, né è caratterizzato dalla preziosità concettuale del capolavoro di Fibonacci. L'interesse de *Larte de labbacho* per la storia della Matematica e della cultura è riferito alle nuove possibilità di divulgazione derivanti, anche per l'Aritmetica, dalla stampa a caratteri mobili: nel manuale trevigiano troviamo infatti un ampio spaccato della cultura matematica "pratica" medievale, che, anche grazie alla stampa, può raggiungere un numero sempre più elevato di lettori e di utilizzatori[12].

[12] Il più vasto lavoro moderno di analisi critica de *Larte de labbacho* è dovuto a Baldassarre Boncompagni (1862-1863). La recente disponibilità di riproduzioni anastatiche de *Larte de labbacho* è importante, in quanto sono note pochissime copie dell'edizione originale del manuale: nel 1888, F.G. Pichi elencava soltanto otto copie originali de *Larte de labbacho* e, sebbene tale valutazione sia da aggiornare, essa è sufficiente per affermare la rarità dell'opera (Pichi, 1888; Smith, 1958, I, p. 249).

1.4. Libri di Logica tra il XV e il XVII secolo

1.4.1. La Logica medievale

Un ruolo importante nella prima produzione di libri a stampa spetta alle opere di Logica edite nella seconda metà del Quattrocento e nel Cinquecento. Dal tramonto dell'Antichità, dopo la fine dell'antica Stoa, furono scritti commentari e manuali, particolarmente dedicati alla Logica aristotelica. Molto influente per la formazione della Logica medievale, e in particolare per la Logica degli Scolastici, fu ad esempio l'opera di Severino Boezio (480?-524) (autore di un importante commento all'*Organon* aristotelico: Solmsen, 1944; Minio Paluello, 1957)[13].

La Logica degli Scolastici, all'inizio del secondo millennio, segnò la ripresa della ricerca logica creativa in Europa (Bagni, 1997). Seguendo Stjazkin (1980), divideremo il periodo della Logica scolastica nelle tre fasi seguenti:

- fino ad Abelardo (prima metà del XII secolo);
- dalla seconda metà del XII al XIII secolo;
- dall'inizio del XIV secolo alla fine del Medioevo[14].

Il momento creativo della Logica scolastica è il secondo. Il primo, infatti, "non si segnala per alcuna novità logica e anche la conoscenza dei risultati precedenti era molto limitata" (Bochenski, 1972, I, p. 200). Nel terzo, infine, ebbe luogo una rielaborazione delle questioni poste; quindi,

[13] Tra le edizioni a stampa dei commenti di Boezio all'opera logica aristotelica ricordiamo: *Aristotelis Stagiritae Organum, hoc est, libri ad Logicam attinentes, Boethio Severino interprete*, apud Hieronymum Cavalcalupum, Venetiis 1559.

[14] Una rivalutazione della Logica medievale è un risultato relativamente recente; ancora poche decine di anni fa si riteneva che la Logica aristotelica fosse da considerare, in se stessa, perfettamente compiuta. In un *Compendium philosophiae* pubblicato in Brasile nel 1947, leggiamo: "Logica tamen ipsius perfecta est: nihil ipsi addi potest, neque additum est in decursu saeculorum" (il passo è citato in: Boehner, 1952, p. 115).

sebbene neppure quest'ultimo periodo possa considerarsi, a rigore, creativo, portò alla precisazione di una Logica profonda (Bagni, 1997). Proprio alla fine di questo periodo l'introduzione della stampa a caratteri mobili rese possibile la diffusione delle opere classiche.

Dalla seconda metà del XV secolo furono pubblicate edizioni a stampa delle opere di Aristotele corredate da apparati critici: la principale edizione latina, con i commenti di Averroè, vide la luce a Venezia nel 1489 e fu riedita nel 1496 (quasi contemporaneamente veniva pubblicato, sempre a Venezia, il testo greco a cura di Aldo Manuzio).

1.4.2. L'eredità della Scolastica

> "Anche nel presente incompleto stato delle conoscenze, possiamo affermare con sicurezza che con la Logica formale scolastica ci troviamo di fronte ad una forma di Logica molto originale e molto bella".
>
> Joseph M. Bochenski

La consuetudine di collocare il tramonto del Medioevo alla fine del XV secolo non implica un'improvvisa interruzione dell'influenza della Logica medievale: anche nei secoli successivi operarono molti logici ispirati alla tradizione scolastica, con la pubblicazione di vasti trattati e di commentarî. Nel periodo umanistico, per contro, la Logica fu spesso concepita in aperta polemica con la concezione scolastica, talvolta accusata di riservare eccessiva attenzione agli aspetti formali (Enriques, 1922, pp. 51-58); alcune importanti ricerche furono parallelamente dedicate a questioni retoriche e psicologiche (Geymonat, 1970, II-III).


Aristo. De celo z mundo cū com. Auer.

Aristote. Stagyrite Lib. iiij. de Celo et mundo: subnexis eius duobus illis de generatione et corrup. cum singulorū Epitomis hactenus non impressis: ac Auerro. fidiss. interprete: necnon eiusdem opusculum de substantia orbis: in calce operis apposito: cū apostillis. M. Ant. Z. Quibus nil inesse vitij deprehendes.

Venundantur Lugduni apud Scipionem de Gabiano in vico mercuriali.

Cum gratia z priuilegio.

***De Coelo et De Mundo* con i commenti di Averroé (Lione, 1529)**

Ma l'analisi logica di un ragionamento espresso esclusivamente nel linguaggio naturale non era in grado di esaurire le pressanti necessità collegate allo studio della deduzione, ad esempio per quanto riguarda le scienze esatte. Così F. Enriques presenta la strada che imboccherà la Logica formale moderna, con riferimento a quella che egli definisce "critica dei rapporti logici":

"Una definizione di tali rapporti si può dire già virtualmente contenuta nell'analisi classica della proposizione, ove si distingue un «soggetto» e un «predicato» legati da una «copula». Ma le sottili disquisizioni del linguaggio scolastico, e meglio ancora le convenzioni paradossali che di tratto in tratto s'introducono nell'espressione delle teorie matematiche, indicano l'insufficienza e l'imprecisione del linguaggio ordinario, agli scopi di una compiuta analisi del pensiero. Nasce quindi l'idea di rimpiazzare l'analisi verbale con un'ana lisi simbolica, foggiando all'uopo un nuovo linguaggio" (Enriques, 1922, p. 174).

La Logica aristotelica, dopo il periodo per molti versi di involuzione collegato alla *Logica di Port-Royal*[15], si evolverà nella Logica matematica formalizzata, inizialmente con le innovazioni di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e quindi, nel XIX secolo, con l'opera di Augustus De Morgan (1806-1871) e di George Boole (1815-1864).

"I linguaggi ordinari, sebbene generalmente utili per le inferenze del pensiero, sono tuttavia soggetti a innumerevoli ambiguità e non possono adempiere al compito di un calcolo...

[15] Ci riferiamo a *La Logica o l'arte di pensare*, trattato apparso anonimo nel 1662 in ambiente giansenista, opera di Antoine Arnauld (1612-1694) e di Pierre Nicole (1625-1695). Per due secoli fu il manuale più diffuso di Logica, con oltre cinquanta ristampe in lingua francese (si veda ad esempio la bella edizione parigina: Arnauld & Nicole, 1748) e traduzioni in molte lingue (tra le quali una dozzina di edizioni latine; ad esempio: *Logica sive Ars Cogitandi*, Bettinelli, Venezia 1749). È evidente, nella *Logica di Port-Royal*, il fondamento aristotelico; ma le drastiche semplificazioni (l'opera si basa sul resoconto di alcune lezioni di Arnauld al giovane duca di Chevreuse, nelle quali avrebbe dovuto essere condensato un anno di studio della Logica ridotto a pochi giorni d'insegname nto!) finiscono per impoverire gravemente l'intero lavoro; ed i continui riferimenti a situazioni pratiche, quotidiane, nonché ad un non meglio definito "buon senso" abbassano la Logica dal rango di teoria a sé stante a quello di disciplina pratica, di insieme di regolette e di accorgimenti. A lungo questo tipo di Logica influenzò pensatori e filosofi: ad esempio, il fiorentino Cesare Baldinotti (1747-1821), docente alle università di Pavia e di Padova e maestro di Rosmini, scrisse nel 1787 il trattato *De recta humanae mentis institutione* (Baldinotti, 1787), nel quale l'influenza della *Logica di Port-Royal* (spesso nella forma, invero poco attuale, di polemica antiscolastica) appare chiara (Bochenski, 1972, I, pp. 337-338).

Questo vantaggio è stato finora fornito soltanto dai simboli [*notae*] degli aritmetici e degli algebristi, per i quali l'inferenza consiste unicamente nell'uso dei caratteri e un errore di pensiero è identico ad un errore di calcolo".

Gottfried Wilhelm Leibniz

1.5. Aritmetica e Logica ai giorni nostri

1.5.1. Dalla teoria dei numeri alle ricerche fondazionali

Concludiamo questo capitolo, dedicato all'Aritmetica ed alla Logica, con una sezione nella quale presenteremo, in termini introduttivi, alcune tendenze della ricerca in campo aritmetico.

Da un lato registriamo lo sviluppo della teoria dei numeri. Nonostante sia sempre difficile stabilire una precisa "data di nascita" per un intero settore della ricerca matematica, la seguente autorevole citazione ricorda alcuni riferimenti cronologici fondamentali:

"Si potrebbe cercare di fissare la data di nascita della moderna teoria dei numeri... Si deve far risalire a un certo momento tra il 1621 e il 1636, probabilmente più vicino alla seconda data. Nel 1621 Bachet pubblicava il testo greco di Diofanto, corredato da un'utile traduzione latina e da un ampio commento. Non si sa con precisione quando Fermat ne acquistò una copia (senza dubbio la stessa sui cui margini avrebbe di lì a poco annotato alcune delle sue più importanti scoperte), né quando iniziò a leggerlo; tuttavia, come si apprende dalla sua corrispondenza, entro il 1636 egli non solo l'aveva studiato a fondo, ma stava già sviluppando autonomamente una serie di idee circa una varietà di argomenti toccati nel volume" (Weil, 1993, p. 3).

Una presentazione dell'evoluzione storica della teoria dei numeri esula dagli intenti del presente lavoro (rimandiamo a: Bottazzini, 1990; Weil, 1993; per una breve storia della teoria additiva dei numeri segnaliamo: Nathanson, 1996a e 1996b; Bagni, 1998). Si noti che nel XIX secolo, lo studio dell'Aritmetica venne ad assumere i caratteri dell'analisi fondazionale. Presenteremo alcune riflessioni basandoci su di un brano scritto dal ventiduenne Giacomo Leopardi:

'L'uomo senza la cognizione di una favella, non può concepire l'idea di un numero determinato. Immaginatevi di contare trenta o quaranta pietre, senz'avere una denominazione da dare a ciascheduna, vale a dire, una, due, tre, fino all'ultima denominazione, cioè trenta o quaranta, la quale contiene la somma di tutte le pietre, e desta un'idea che può essere abbracciata tutta in uno stesso tempo dall'intelletto e dalla memoria, essendo complessiva ma definita ed intera. Voi nel detto caso, non mi saprete dire, né concepirete in nessun modo fra voi stesso la quantità precisa delle dette pietre; perché quando siete arrivato all'ultima, per sapere e concepire detta quantità, bisogna che l'intelletto concepisca, e la memoria abbia presenti in uno stesso momento tutti gl'individui di essa quantità, la qual cosa è impossibile all'uomo. Neanche giova l'aiuto dell'occhio, perché volendo sapere il numero di alcuni oggetti presenti, e non sapendo contarli, è necessaria la stessa operazione simultanea e individuale della memoria. E così se tu non sapessi fuorché una sola denominazione numerica, e contando non potessi dir altro che uno, uno, uno; per quanta attenzione vi ponessi, affine di raccogliere progressivamente coll'animo e la memoria, la somma precisa di queste unità, fino all'ultimo; tu saresti sempre nello stesso caso. Così se non sapessi altro che due denominazioni ecc. Eccetto una piccolissima quantità, come cinque o sei, che la memoria e l'intelletto può concepire senza favella, perché arriva ad aver presenti simultaneamente tutti i pochi individui di essa quantità... In genere l'idea precisa del numero, o coll'aiuto della favella o senza, non è mai istantanea, ma composta di successione, più o meno lunga, più o meno difficile, secondo la misura della quantità" (da *Zibaldone di pensieri*, 28 XI 1820: Leopardi, 1969).

Il brano suggerisce alcune osservazioni sul concetto di numero naturale. Innanzitutto, appare evidente la centrale importanza che l'Autore attribuisce al linguaggio[16]. Già dall'esordio ("L'uomo senza la cognizione di una favella, non può concepire l'idea di un numero determinato"), infatti, Leopardi si riferisce esplicitamente al ruolo essenziale della denominazione dei singoli numeri naturali: è proprio grazie alla "denominazione" che possiamo numerare gli elementi di un insieme finito (ovvero che possiamo identificare, progressivamente, i suoi sottoinsiemi di cardinalità crescente) fino a giungere all'indicazione della totalità (a fissare "un'idea che può essere abbracciata tutta in uno stesso tempo dall'intelletto e dalla memoria, essendo complessiva ma definita ed intera").

Questa concezione numerica è dunque strettamente legata al conteggio, all'atto di enumerare: il ruolo della "favella" viene ad essere decisivo proprio in quanto consente lo svolgersi della corretta esecuzione pratica di tale atto ("E così se tu non sapessi fuorché una sola denominazione numerica, e contando non potessi dir altro che uno, uno, uno..."). Leopardi, verso la fine del brano citato, riconosce chiaramente che il concetto stesso di numero, mediante (ed oltre) la successione delle "denominazioni", si lega inscindibilmente al conteggio ("L'idea precisa del nume ro,

[16] Vengono alla mente le recenti ricerche in àmbito didattico che analizzano il ruolo del linguaggio; ad esempio: D'Amore, 1993; Maier, 1993a e 1993b.

o coll'aiuto della favella o senza, non è mai istantanea, ma composta di successione").

Questa considerazione può essere modernamente ripresa ed approfondita con l'esame di alcune impostazioni dell'Aritmetica che, come vedremo, basano le proprie radici sull'introduzione ricorsiva.

1.5.2. L'impostazione assiomatica di Peano

Dal punto di vista storico, osserva N. Bourbaki che "prima del XIX secolo, pare non vi sia stato alcun tentativo di definire l'addizione e la moltiplicazione dei numeri naturali se non richiamandosi direttamente all'intuizione; Leibniz è il solo che, fedele ai propri principi, fa espressamente notare che delle "verità evidenti" come 2+2 = 4 sono anch'esse suscettibili di dimostrazione se si riflette sulle definizioni dei numeri che vi figurano; egli non riteneva affatto come scontata la commutatività dell'addizione e della moltiplicazione. Ma non spinge oltre le sue riflessioni a questo proposito, e, verso la metà del XIX secolo, nessun progresso si era ancora compiuto" (Bourbaki, 1963).

Con il lavoro *Sul concetto di numero* (1891), Giuseppe Peano (1858-1932), rielaborando alcune idee introdotte da Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) nello scritto *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888), propose un'introduzione assiomatica dell'Aritmetica basata su tre concetti primitivi (l'*unità*, che in una seconda stesura fu sostituita con lo *zero*; il *numero*; il *successivo*) e su sei assiomi (definitivamente enunciati nel 1898 in *Aritmetica*, la II parte del II volume del *Formulaire de mathematiques*: Peano, 1908, p. 27; Kennedy, 1983):

Assioma zero. I numeri formano una classe[17].

---

[17] Sulla necessità dell'Assioma zero si veda l'osservazione riportata nel peaniano *Formulario Mathematico*, (Peano, 1908, p. 27); notano a tale proposito B. D'Amore e

Assioma I. Lo zero è un numero.

Assioma II. Se *a* è un numero, il suo successivo *a*+ è un numero.

Assioma III. Se *s* è una classe contenente lo zero e, per ogni a, se *a* appartiene a *s*, il successivo *a*+ appartiene a *s*,; allora ogni numero naturale è in *s* ("principio di induzione": è uno schema di assiomi: Chang & Keisler, 1973)[18].

Assioma IV. Se *a* e *b* sono due numeri e se i loro successivi *a*+, *b*+ sono uguali, allora *a* e *b* sono uguali.

Assioma V. Se *a* è un numero, il suo successivo *a*+ non è zero.

L'addizione secondo Peano si basa sulle due condizioni seguenti, date nella simbologia originale (Peano, 1908, p. 29):

Addizione I. Se *a* è un numero, $a+0 = a$.

Addizione II. Se *a* e *b* sono due numeri, $a+(b+) = (a+b)+$.

Per induzione, quindi, Peano dimostra che se *a*, *b* sono numeri, anche $a+b$ è un numero (si veda: Peano, 1908; alcune dimostrazioni sono riportate in: Carruccio, 1972).
La relazione introdotta da Peano è un'applicazione ($a+$) avente per dominio l'insieme dei numeri naturali e per codominio l'insieme dei numeri naturali non nulli, e che è

M. Matteuzzi: "Il postulato *zero* ci spiega che possiamo applicare alla classe N_0 il calcolo delle classi *precedentemente* sviluppato" (D'Amore & Matteuzzi, 1975, p. 144). I termini *classe*, *uguale*, *minore* venivano definiti da Peano nel capitolo precedente.

[18] Per quanto riguarda l'induzione, nota E. Carruccio: "Il principio di induzione matematica è usato, ma mai esplicitamente enunciato, da Euclide. Lo enunciò invece l'abate Maurolico (nel Rinascimento): ripreso da Dedekind, si ritrova alla base dell'Aritmetica di Peano" (Carruccio, 1972, p. 8). Accenniamo appena alla necessità di impiegare con cautela metodi induttivi non completi nella pratica didattica. C. Marchini, esaminando alcune dimostrazioni poco rigorose tratte da libri di testo per la scuola secondaria, riscontra talvolta (purtroppo) la presenza di "quel metodo induttivo, dal particolare al generale, tanto severamente bollato da Popper" (Marchini, 1992, p. 100).

una biiezione. Si può inoltre dimostrare che Peano introduce nell'insieme dei numeri naturali un ordine stretto[19]. Possiamo dunque concludere che dall'impostazione peaniana, basata sull'applicazione che ad ogni naturale associa il successivo, emerge il ruolo essenziale del concetto di successione[20].

1.5.4. Dall'aspetto storico a quello didattico

Un'esplicita attenzione alla concezione operativa, dunque, è alla base di alcuni importanti tentativi di formalizzazione dell'Aritmetica.

Un tale atteggiamento è costante nella storia della Matematica: lo stesso sviluppo del concetto di numero può essere interpretato come "lo svolgimento di una catena di passaggi dalle concezioni operative a quelle strutturali. D'altra parte, anche prima che i processi generatori di nuovi numeri fossero considerati come oggetti, i matematici li usavano e li combinavano in operazioni" (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 9).

Concludiamo osservando che l'annotazione storica secondo la quale molto spesso l'aspetto operativo precede

---

[19] Applicando opportunamente gli assiomi, ed approntando le necessarie dimostrazioni, Peano giunse ad introdurre le operazioni aritmetiche con i numeri naturali, nonché a descrivere ed a dimostrare le loro proprietà formali. Osservano B. D'Amore e M. Matteuzzi: "In un libro di neppure 500 pagine, Peano è stato in grado di condensare la Matematica pura ed applicata comprendendo tutte le teorie, dalla teoria dei numeri, all'Algebra, alla Geometria, all'Analisi, alla meccanica pura ed applicata. Il linguaggio, dunque, si è rivelato veramente potente" (D'Amore & Matteuzzi, 1975, p. 148).

[20] Tra i molti lavori classici sull'introduzione logica dell'aritmetica indichiamo ad esempio: Chang & Keisler (1973); Bell & Machover (1977); Mendelson (1979). Sull'intuizionismo indichiamo il classico lavoro: Heyting (1956). Per il punto di vista algebrico si veda ad esempio: Jacobson, 1974.

quello strutturale, assume una netta rilevanza in numerose questioni di didattica della Matematica[21].

A. Sfard, in una nota ricerca (1991), dopo avere sottolineato la sostanziale astrazione che caratterizza la Matematica[22], sottolinea la possibilità di concepire (e di presentare) parallelamente i contenuti matematici in termini strutturali (interpretandoli, dunque, come "oggetti") ed in termini operativi (interpretandoli, dunque, come "processi"):

"Saper vedere un'entità matematica come un oggetto significa essere capaci di riferirsi ad essa come ad una cosa reale, una struttura statica... e di manipolarla come un tutto... Interpretare una nozione come processo significa considerarla come entità potenziale piuttosto che attuale, che viene alla luce a fronte di una sequenza di azioni. Quindi, mentre la concezione strutturale è statica..., istantanea e complessiva, quella operativa è dinamica, sequenziale e particolareggiata" (Sfard, 1991, p. 4).

La Sfard, inoltre, estende tale fondamentale distinzione alle codifiche (e l'Autrice sembra così riprendere

---

[21] Osserva Y. Chevallard: "Intellettualmente, per generazioni, l'Aritmetica è stata il paradiso verde degli amori infantili, il latte e il miele dello spirito che si apre, per suo tramite, all'incanto di un'attività intellettuale riflessa, padroneggiata e felice... Così l'Aritmetica, troppo bene appresa, veniva a fare da ostacolo intellettuale, affettivo e ideologico, al suo superamento" (Chevallard, 1989, p. 15, citato in: Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 15). Citiamo a tale riguardo anche G. Vergnaud, A. Cortes, e P. Favre-Ortigue, che scrivono: "L'Algebra rappresenta per gli allievi un'importante rottura epistemologica rispetto all'Aritmetica. Questa rottura merita un'analisi dettagliata, in quanto molti allievi non entrano facilmente nel gioco della manipolazione simbolica e di conseguenza si allontanano dalla Matematica" (Vergnaud, Cortes & Favre-Ortigue, 1997, p. 253).

[22] "Diversamente dagli oggetti materiali... le strutture della Matematica superiore sono totalmente inaccessibili ai nostri sensi e possono essere viste solo con gli occhi della mente... Essere capaci di 'vedere' in qualche modo questi oggetti invisibili sembra essere una componente essenziale dell'abilità matematica" (Sfard, 1991, p. 3).

idealmente le annotazioni di Leopardi precedentemente citate), osservando che le codifiche verbali ‘non possono essere colte ‘a colpo d’occhio’ e debbono essere elaborate sequenzialmente, dunque sembrano più adatte per presentare procedure di calcolo. In tal modo, la rappresentazione interna non iconica è più pertinente al modo di pensare operativo” (Sfard, 1991, p. 7, con riferimento a: Hadamard, 1949, p. 77).

Pur senza pretendere di esaurire un argomento assai profondo e delicato, anche dal punto di vista epistemologico, possiamo dunque concludere che l’introduzione operativa di molti concetti fondamentali della Matematica (e, tra questi, degli elementi dell’Aritmetica) è una questione particolarmente importante e dibattuta anche in àmbito didattico.

Bibliografia del capitolo 1

Arzarello, F.; Bazzini, L. & Chiappini, G. (1994), *L’Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*, Progetto strategico del CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 6.

Bagni, G.T. (1989), L’Aritmetica di Treviso, D’Amore, B. & Speranza F. (a cura di), *Lo sviluppo storico della matematica*, I, Armando, Roma, 27-34.

Bagni, G.T. (1994a), I metodi pratici di sottrazione nei manuali di Aritmetica, *La matematica e la sua didattica* 4, 364-373.

Bagni, G.T. (1994b), Numeri e operazioni nel Medioevo. Larte de labbacho (l’Aritmetica di Treviso, 1478), *La matematica e la sua didattica*, 4, 432-444.

Bagni, G.T. (1995), Il primo manuale di matematica stampato al mondo. Larte de labbacho (Treviso, 1478), *Cassamarca*, 11, IX, 2, 77-82.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T. (1997), *Elementi di storia della Logica formale*, Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T. (1998), Problemi di teoria additiva dei numeri. La congettura di Goldbach e la teoria di Raphael Robinson, *Atti e Memorie dell'Ateneo di Treviso*, in via di pubblicazione.

Bell, J. & Machover, M. (1977), *A course in Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam.

Blanché, R. (1973), *La logica e la sua storia*, Ubaldini, Roma.

Bochenski, J.M. (1972), *La logica formale. I. Dai Presocratici a Leibniz. II. La logica matematica*, Einaudi, Torino.

Boehner, Ph. (1952), *Medieval logic. An outline of its development from 1250 to c. 1400*, The University of Chicago Press, Chicago.

Bombelli, R. (1966), *L'Algebra*, Forti, U. & Bortolotti, E. (a cura di), Feltrinelli, Milano.

Boncompagni, B. (1852), *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano*, Tipografia delle Belle Arti, Roma.

Boncompagni, B. (1854a), *Notizie intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*, Tipografia delle Belle Arti, Roma.

Boncompagni, B. (1854b), *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, Tipografia Galileiana, Firenze.

Boncompagni, B. (1862-1863), Intorno ad un trattato d'Aritmetica stampato nel 1478, *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, XVI, XVI.

Bortolato, Q. & Contò, A. (1985) Il carteggio inedito Boncompagni-Fapanni sull'Aritmetica di Treviso, 1478, *Studi Trevisani*, II, 4. Le lettere sono conservate nel

Fondo Fapanni, Biblioteca Comunale di Treviso, VII, II, L.

Bortolotti, E. (1925), L'Algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI, *Periodico di matematiche*, IV.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).

Carruccio, E. (1971), *Mondi della logica*, Zanichelli, Bologna.

Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.

Catena, P. (1992), *Universa loca in Logicam Aristotelis in Mathematicas disciplinas*, G. Dell'Anna (a cura di), Congedo, Lecce.

Chang, C.C. & Keisler, H.J. (1973), *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam.

Chevallard, Y. (1989), Arithmetique, algebre, modelisation, *Publications de l'IREM d'Aix -Marseille*.

D'Acais F. & Porro, B. (a cura di) (1969), *L'Aritmetica di Treviso*, copia anastatica, Società Tipografica Cremonese, Roma.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1975), *Dal numero alla struttura*, Zanichelli, Bologna.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1976), *Gli interessi matematici*, Marsilio, Venezia.

D’Amore, B. & Oliva, P. (1993), *Numeri*, Angeli, Milano.

D’Amore, B. (1991), Ricerca-azione, possibile paradigma della ricerca in didattica, *La scuola se*, 79-80, 14-17.

D’Amore, B. (1993), Esporre la matematica appresa, un problema didattico e linguistico, *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.

Deschamp, P. & Brunet G. (1878), *Manuel du Libraire*, Supplement, I, Paris.

Dieudonné, J. (1989), *L’arte dei numeri*, Mondadori, Milano (*Pour l’honneur de l’esprit humain*, Hachette, Paris 1987).

Enriques, F. (1922), *Per la storia della logica*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica, 1987, Zanichelli, Bologna).

Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni, L. (a cura di), UTET, Torino.

Federici, D.M. (1805), *Memorie trevigiane sulla tipografia del secolo XV per servire alla storia letteraria d’Italia*, Venezia.

Feldman, C.F. & Toulmin, S. (1976), Logic and the theory of mind, Cole, J.K. (a cura di), *Nebraska symposium on motivation 1975*, University of Nebraska Press, Lincoln, London.

Franci, R. & Toti Rigatelli, L. (1979), *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano.

Frati, L. (1910), Scipione dal Ferro, *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, XII.

Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.

Goodstein, R.L. (1957), *Recursive Number Theory*, North-Holland, Amsterdam.

Hadamard, J.S. (1949), *The psychology of invention in the mathematics field*, Princeton University Press, Princeton (NJ).

Heyting, A. (1956), *Intuitionism, an introduction*, North-Holland, Amsterdam.

Ifrah, G. (1989), *Storia universale dei numeri*, Mondadori, Milano.

Jacobson, N. (1974), *Basic Algebra I*, Freeman, San Francisco.

Keiser, C.J. (1956), The Group Concept, Newman, J.R. (a cura di), *The world of mathematics*, III, Simon and Schuster, New York, 1538-1557.

Kennedy, H. (1983), *Peano, storia di un matematico*, Boringhieri, Torino.

Kline, M. (1982), *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano (*Mathematics in western culture*, Oxford University Press, New York 1953).

Kline, M. (1985), *Matematica: la perdita della certezza*, Mondadori, Milano (*Mathematics: the loss of certainity*, Oxford University Press, New York 1980).

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York 1972).

Kneale, W.C. & Kneale, M. (1972), *Storia della logica*, Einaudi, Torino.

Leblond, J.M. (1939), *Logique et méthode chez Aristote*, Vrin, Paris.

Leopardi, G. (1969), Zibaldone di pensieri, *Tutte le opere*, W. Binni, (a cura di), II, Sansoni, Firenze.

Lolli, G. (1988), *Introduzione alla logica formale,* Il Mulino, Bologna.

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Lukasiewicz, J. (1927), On the History of the Logic of Propositions, *Praeglad Filozoficzny*, XXIII, 189-205.

Lukasiewicz, J. (1965), *La sillogistica di Aristotele*, Negro, C. (a cura di), Brescia.

Machì, A. (1974), *Introduzione alla teoria dei gruppi*, Feltrinelli, Milano.

Maier, H. (1993a), Conflit entre language mathématique et langue quotidienne pour les élèves, *Cahier de didactique des mathématiques*, 3, 86-118 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1995, 298-305).

Maier, H. (1993b), Problemi di lingua e comunicazione durante le ore di matematica, *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.

Maierù, A. (1972), *Terminologia logica della tarda scolastica*, Edizioni dell'Ateneo, Roma.

Maracchia, S. (1979), *Da Cardano a Galois*, Feltrinelli, Milano.

Marchini, C. (1992), Procedimenti dimostrativi presenti nei manuali scolastici, Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico del CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 13, 97-110.

Mendelson, E. (1979), *Introduction to mathematical logic*, Van Nostrand, Princeton (2nd edition).

Michieli, A.A. (1958), *Storia di Treviso*, Istituto Tipografico dei Comuni, Treviso (riedizione con aggiornamento ed integrazione a cura di G. Netto: Istituto Tipografico dei Comuni, Treviso 1981).

Minio Paluello, L. (1957), Les traductions et les commentaires aristotéliciens de Boèce, *Studia patristica*, 2, 358-365.

Moody, E.A. (1953), *Truth and consequence in medieval logic*, North-Holland, Amsterdam.

Morelli, M. & Tangheroni, M. (a cura di) (1994), *Leonardo Fibonacci. Il tempo, le opere, l'eredità scientifica*, Pacini, Pisa.

Najmark, M.A. & Stern, A.I. (1984), *Teoria delle rappresentazioni dei gruppi*, Editori Riuniti, Roma.

Nathanson, M.B. (1996a), *Additive number theory. The classical bases*, Springer, New York.

Nathanson, M.B. (1996b), *Additive number theory. Inverse problems and geometry of sumsets*, Springer, New York.

Neugebauer, O. (1974), *Le scienze esatte nell'antichità*, Feltrinelli, Milano.

Newman, J.R. (1956), *The world of Mathematics*, I-IV, Simon and Schuster, New York.

Peano, G. (1908), *Formulario Mathematico*, Editio V, Fratres Bocca Editores, Torino (riproduzione in fac-simile dell'edizione originale con introduzione di U. Cassina, Cremonese, Roma 1960).

Pichi, F.G. (1888), *Di un nuovo esemplare dell'Abbaco di Treviso del 1478 posseduto dalla Biblioteca della Regia Università di Bologna*, Bologna.

Picutti, E. (1977), *Sul numero e la sua storia*, Feltrinelli, Milano.

Prantl, K. (1937), *Storia della logica in occidente. L'età medievale: dal secolo VII al secolo XII*, Limentani, L. (a cura di), Firenze (parziale traduzione di: 1855-1870, *Geschichte der Logik im Abendlande*, Lipsia).

Rhodes, D.E. (1983), La stampa a Treviso nel secolo XV, Biblioteca Comunale, Treviso 1983.

Romano, G. (a cura di) (1969), *Larte de labbacho*, copia anastatica, Longo e Zoppelli, Treviso.

Rouse Ball, W.W. (1927), *Le Matematiche dall'antichità al Rinascimento*, Zanichelli, Bologna.

Scholz, H. (1962), *Storia della logica*, Silva, Milano.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Smith, D.E. (1958), *History of Mathematics*, Dover, New York.

Smith, D.E. (1959), *A source book in Mathematics*, Dover, New York (prima edizione: McGraw-Hill, 1929).

Solmsen, F. (1941), The discovery of the syllogism, *Philosophical review*, 50.

Solmsen, F. (1944), Boethius and the history of the Organon, *Americ. Journ. of Philol.*, 31, 59-74.

Stillwell, J. (1997), *Mathematics and its History*, Springer, Berlin (quarta edizione; prima edizione: 1989).

Stjazkin, N.I. (1980), *Storia della logica*, Editori Riuniti, Roma.

Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).

Tahta, T. (1985), On notation, *Mathematics teaching*, 112, 49-51.

Van der Waerden, B.L. (1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, Berlin.

Veratti, B. (1860), *De' matematici italiani anteriori all'invenzione della stampa*, Soliani, Modena (ristampa anastatica: Forni, Bologna 1980).

Vergnaud, G.; Cortes, A. & Favre-Ortigue, P. (1997), Introduzione dell'algebra ai principianti "deboli": problemi epistemologici e didattici, *La matematica e la sua didattica*, 3, 253-271 (*Actes du Colloque de Sèvres: Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 1987, 259-279).

Vorobiev, N.N. (2002), *Fibonacci Numbers*, Birkhäuser, Basel.

Weil, A. (1993), *Teoria dei numeri. Storia e matematica da Hammurabi a Legendre*, Einaudi, Torino.

Testi originali riferiti al capitolo 1

Albertus (de Saxonia) (1497), *Quaestiones subtilissimae in libros de coelo et mundo*, per Otinum Papiensem, Venezia.

Anonimo (1478), *Larte de Labbacho*, senza indicazione dell'editore, Treviso.

Aristotele (1529), *De coelo et de mundo*, Fabiano, Lione.

Arnauld, A. & Nicole, P. (1748), *La Logique ou l'Art de Penser*, Desprez, Paris (l'edizione originale è del 1662; una versione latina è del 1749: *Logica sive Ars Cogitandi*, Bettinelli, Venezia).

Baldinotti, C. (1787), *De recta humanae mentis institutione*, Galeazzi, Pavia.

Bonardo, G.M. (1583), *La grandezza, larghezza e distanza di tutte le sfere*, Zoppini, Venezia.

Bourdon, A. (1861), *Elementi di Aritmetica*, Bizzoni, Pavia.

Brunacci, V. (1820), *Elementi di Algebra e Geometria*, Imperiale Regia Stamperia, Milano.

Clavio, C. (1738), *Aritmetica prattica*, Viezzeri, Venezia.

Duns Scoto, G. (1508), *Questiones utiles super Libros priorum. Eiusdem questiones super Libros posteriorum*, Locatelli, Venezia.

Francoeur, L.B. (1843), *Corso completo di matematiche pure*, Batelli, Napoli.

Jandun, G. (1589), *In Aristotelis libros de coelo et de mundo*, Scoto, Venezia.

Mako Von Kerek Gede, P. (1584), *Compendiaria matheseos institutio quam in usum auditorum philosophiae*, apud Laurentium Basilium, Venetiis.

Marie, A. (1796), *Lezioni elementari di matematiche*, Allegrini, Firenze.

Morel, A. (1742), *L'Arithmétique raisonnée*, Desaint-Saillant, Paris.

Paulini a S. Josepho (P. Chelucci) (1767), *Institutiones Arithmeticae*, Occhi, Venezia (altra edizione: Severini, Napoli 1786).

Pereira, A. (1760), *Tratado de Arithmetica e Algebra*, Da Silva, Lisbona.

Peurbach, G. (1550), *Theoricæ novæ planetarum*, Wechel, Paris.

Pincherle, S. (1920), *Gli elementi dell'Aritmetica*, Zanichelli, Bologna.

Sylvii, F. (1726), *Commentarii in tertiam partem S. Thomæ Aquinatis*, Ex Typographia Balleoniana, Venezia.

Thomas (Sanctus Aquinas) (1555), *Praeclarissima commentaria in Libros Aristotelis Perihermenias & Posteriorum Analyticorum*, Scoto, Venezia.