Συλλογισμός

Syllogismos

History and Epistemology for Mathematics Education
Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Libri e idee *(a cura di G.T. Bagni)*
Appunti di storia per la didattica della matematica

Capitolo 2
L'Algebra da Bombelli a Euler

2.1. Uno sguardo alla storia dell'Algebra

2.1.1. Tra concetti e simboli

La storia dell'Algebra è molto antica: se ci limitiamo a considerare i principali problemi algebrici (ad esempio la risoluzione di equazioni o di semplici sistemi), possiamo affermare che una forma sufficientemente progredita di Algebra nacque molti secoli prima dell'era volgare presso gli Egizi e presso i Babilonesi. Questi ultimi, in particolare, erano in grado di risolvere equazioni di grado anche superiore al primo nonché sistemi di equazioni in due incognite (Neugebauer, 1974; D'Amore & Matteuzzi, 1976; Kline 1991; Bagni, 1996, I).

Seguendo R. Franci e L. Toti Rigatelli, dal punto di vista dei concetti, le origini dell'Algebra si possono far risalire a tre fonti diverse: "alla Matematica siriaco-babilonese, alla Matematica indiana, alla Matematica greca ed in particolare all'opera di Diofanto (III secolo d.C.). La recente interpretazione (prima metà del XX secolo) di O. Neugebauer di tavolette di terracotta scritte in caratteri cuneiformi ci permette di affermare che, già verso il 2000 a.C., i Babilonesi erano in grado di risolvere equazioni… ed avevano conoscenza di procedimenti che oggi chiamiamo algebrici" (Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 8).

Se dunque "dal punto di vista dei concetti" l'Algebra nacque almeno una ventina di secoli prima dell'era volgare, deve essere tuttavia sottolineato che non esisteva uno strumento simbolico completo nell'Algebra antica: soltanto in alcuni casi, e dunque senza alcuna sistematicità, qualche incognita veniva indicata mediante simboli speciali; in generale, i Babilonesi indicavano le quantità incognite con i termini *lunghezza* (per le incognite di primo grado), *area* (per quelle di secondo grado), *volume* (per quelle di terzo grado); si noti che i matematici babilonesi erano consapevoli del valore indicativo di tali termini e addizionavano, ad esempio, lunghezze ed aree, aree e volumi.

Inoltre, presso i Babilonesi non troviamo uno studio sistematico e generale delle equazioni algebriche, né alcuna giustificazione esplicita dei metodi applicati: si procedeva dunque esaminando i singoli casi, e solo raramente, nella risoluzione di equazioni, i Babilonesi si mostrarono in grado di cogliere legami concettuali e analogie significative tra i diversi problemi (Franci & Toti Rigatelli, 1979, pp. 28-29; Bottazzini; Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 161).

La risoluzione delle equazioni presso i Babilonesi, tuttavia, rappresenta un esordio molto stimolante per la storia dell'Algebra; purtroppo, però, a tale esordio non seguì un'altrettanto positiva evoluzione: pertanto, dopo un inizio "promettente" per uno sviluppo autonomo dell'Algebra nelle civiltà pre-elleniche, "questo importante ramo della Matematica si viene a trovare poi per vari secoli subordinato alla più potente Geometria". Nella Matematica greca, infatti, l'Algebra appare "rivestita da orpelli e fronzoli geometrici che, se pur consentivano la risoluzione di semplici problemi di primo e di secondo grado, non ne permisero uno sviluppo successivo" (Maracchia, 1979, p. 31).

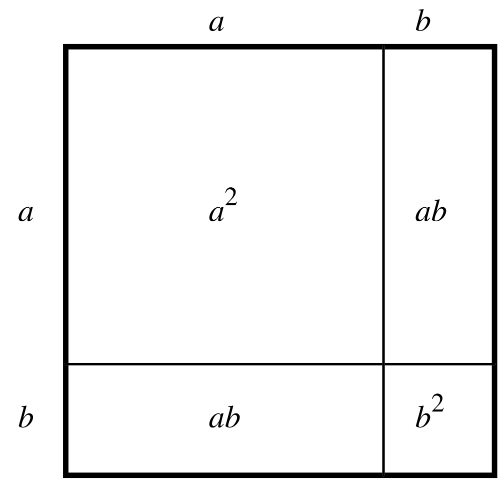
Il mondo greco, dunque, privilegiò sistematicamente la Geometria, anche nell'approccio ai problemi che saranno detti "algebrici" (come vedremo il termine *algebra* avrà origine nella cultura araba). Il II libro degli *Elementi* di Euclide (opera la cui redazione è collocata intorno al 300 a.C.) è dedicato all'*Algebra geometrica*,[1] un settore particolarmente elegante e originale della Matematica greca (si veda ad esempio: van der Waerden, 1983).

Riportiamo, ad esempio, la proposizione 4, che esprime la nota regola algebrica del quadrato di una somma.

Proposizione 4 del II libro degli *Elementi*. Se si divide a caso un segmento, il quadrato di tutto il segmento è equivalente (equiesteso) alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti stesse (Euclide, 1970, p. 163).

La figura seguente (che si riferisce direttamente, dunque, all'ambito geometrico) esprime tale proposizione.

[1] "L'idea centrale che caratterizza l'Algebra geometrica (il termine fu coniato da H. G. Zeuthen) appare semplice ed intuitiva: essa consiste nella rappresentazione dei numeri reali attraverso grandezze geometriche (ad esempio: segmenti). Le operazioni possono quindi essere visualizzate mediante figure: se due numeri sono identificati con due segmenti, il loro prodotto può essere fatto corrispondere ad un rettangolo; un'uguaglianza di prodotti viene così ad essere ricondotta all'equiestensione dei corrispondenti rettangoli. Attraverso tali tecniche possono essere enunciate regole di calcolo generali, ovvero procedimenti riferiti a numeri qualsiasi" (Bagni, 1996, I).



La sua moderna espressione simbolica è: $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$.

Al mondo greco appartiene anche Diofanto di Alessandria (vissuto tra il 250 e il 350: D’Amore & Matteuzzi, 1976, p. 66): la sua opera maggiore è l’*Aritmetica*, in tredici libri (ce ne sono però pervenuti soltanto sei), una raccolta di problemi vasta ed originale[2]. Diofanto viene considerato da molti storici della scienza il “padre dell’Algebra”, sebbene il simbolismo da lui usato fosse piuttosto complicato, scomodo e non completo; esso, tuttavia, per molti versi anticipò di oltre un millennio il passaggio dall’Algebra retorica (in cui le equazioni venivano interamente descritte impiegando parole tratte dalla lingua corrente) all’Algebra sincopata (in cui si ricorreva a descrizioni abbreviate) fino alla moderna Algebra simbolica.

[2] Nella produzione diofantea è generalmente riscontrabile un’ideale influenza della matematica babilonese; ma a differenza di quanto si nota per le tavolette mesopotamiche, spesso contenenti approssimazioni ed errori, i procedimenti e i risultati di Diofanto sono esatti.

A contendere a Diofanto il titolo di "padre dell'Algebra" è l'arabo Mohammed Ibn Musa Al Kuwarizmi (VIII secolo), di origine persiana, che scrisse *Al jabr wal mukabalah*, opera nella quale sviluppò una chiara teoria delle equazioni, particolarmente di quelle di secondo grado (sembra però che il procedimento generale per la risoluzione di tali equazioni, ricordato dal matematico arabo, sia di derivazione indiana).


172 HIERON. CARDANI COMMENT. IN

erit angulus B A C sexta pars quatuor rectorum, igitur duæ tertiæ unius recti. Et similiter captis partibus 120. quæ sint arcus B E, erit B E tertia pars zodiaci, nam 120. est tertia pars 360. & angulus B A E eadem ratione erit rectus cum tertia, id est, tertia pars quatuor rectorum, & residuum ad duos rectos angul[illegible] sextilis, nam rectus & tertia pars recti cum duabus tertijs recti faciunt [illegible] rectos. Constat igitur & in trigono, & in sextili, & quadrato quod radij, & recte, si reflecterentur uersus partem oppositum, utpote sextilis ex C in E, & ex E in G, & ex G in F, & ex F in K & ex K in B, tandem rediret per æquales lineas & angulos. Et similiter latus B F trigoni si reflecteretur transiret in F & ex F in B, & ita per æquales angulos, & lineas. Idem dico de quadrato B D, quod est latus arcus B D, qui est partium 90. & ideo quarta pars 360. & totius zodiaci. Cum igitur etiam angulus B A D, sit quarta spacij pars eius quod est circa A, erit angulus B A D rectus ad unguem. Pari ratione spacium B A G ex una parte cum [illegible] dimidium quatuor rectorum, erit duorum rectorum, & arcus B D G partium 180. id est, dimidium 360. & ita G dicetur opponi B. Omnes autem radij præter oppositos duplices sunt sinistri & sunt qui tendunt secundum ordinem signorum, ut sextilis B C, & trigonus A E, & dextri qui tendunt contra ordinem signorum, ut sextilis B K & trigonus B F. Et ita de quadratis ex quo patet quod radius B C dicitur sinister respectu B, & dexter respectu C. Et ita trigonus B F sinister est respectu [illegible], & dexter respectu F.

Ex his patet quod radij ueri sunt ex similibus partibus in similes, uelut posito Sole in parte undecima Libræ, radius quadratus dexter erit in 11. parte Cancri, sinister in 11. parte Capricorni. Sextilis dexter in 11. parte Leonis & sinister in 11. parte Sagitarij. Et oppositio in 11. parte Arietis. Et trinus dexter in 11 parte Geminorum & sinister in 11. parte Aquarij. Idem etiam intelliges de partibus partium. Vt si Sol esset in partibus decem minutis 47. Libræ, erunt radij omnes dicti in eisdem signis partibus decem minutis 47.

Sed dices quare Ptolemæus non respexit latera octogoni quæ respiciunt per 45. partes & duodecagoni quæ per 30? Respondeo quia latera octogoni non comprehēdunt integra signa. Duodecagoni autem quia nimis sunt debilia. Igitur isti aspectus solum sufficiunt. In creticorum tamen dierum supputatione utimur figura octageni aspectus in quem cadit quartus dies indicatiuus, ut sic in consideratione.

TEXTVS XLVI.

Cur autem hæc tantūmodo discrimina recepta fuerint, hinc cognitu facile erit. Atq; ipsius quidem diametri ratio per se patet, nā oppositio est in una linea recta. Cæterum si maximas duas portiones conuenientes, atq; item supra portiones accipiamus. Nempe

rectam

In Claudii Ptolemaei De astrorum judiciis **di G Cardano, senza data (1554?)**

Gli Arabi diedero dunque all'Algebra... il nome (*Al jabr*, dal titolo dell'opera ora citata) e una struttura teorica corretta; non diedero ad essa un moderno strumento simbolico: l'Algebra araba è infatti ancora espressa in forma retorica. Diamo alcuni esempi di espressioni dell'Algebra retorica, tratti da lavori medievali e rinascimentali (Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 9):

cose uguale a numero	$ax = b$
censi e cose uguale a numero	$ax^2+bx = c$
censi uguale a numero	$ax^2 = b$
censi uguale a cose	$ax^2 = bx$
censi e numero uguale a cose	$ax^2+c = bx$
censi uguale a cose e numero	$ax^2 = bx+c$
cubo e cose uguale a numero	$x^3+bx = c$
cubo uguale a cose e numero	$x^3 = bx+c$
cubo e numero uguale a cose	$x^3+c = bx$

Come sopra accennato, nell'Algebra sincopata, utilizzata ad esempio da Luca Pacioli (1445-1514), le quantità e le operazioni erano indicate da simboli atti ad abbreviare le parole della lingua corrente; la scrittura:

"Trouame 1.n°. che gioto al suo qdrat° facia .12"

rappresentava l'equazione modernamente indicata:

$$x+x^2 = 12$$

Anche Girolamo Cardano (1501-1576) usava una notazione algebrica sincopata, della quale diamo un esempio (Kline, 1991, I, p. 304):

"Qdratu aeqtur 4 re bus p: 32"

che rappresentava l'equazione modernamente scritta:

$$x^2 = 4x+32$$

Nell'Algebra simbolica (utilizzata a partire da François Viète, circa un secolo dopo Pacioli) tutte le operazioni e le quantità saranno espresse con una simbologia specifica (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992)[3].

2.1.2. L'*Algebra* di Bombelli

> "Accetti dunque il Lettore con animo libero da ogni passione l'opera mia, e cerchi farsene intendente, che vedrà di quanto giovamento gli sarà, avisandolo però che se egli capace non sarà della parte minore della Aritmetica, non si ponghi a questa impresa di volere apprendere l'Algebra, perché getterebbe il tempo".
>
> Rafael Bombelli

Il bolognese Rafael Bombelli è un protagonista della storia dell'Algebra (Bortolotti, 1925). Il suo capolavoro, *Algebra*, fu probabilmente completato prima del 1551 (Bombelli, 1966, p. XXXI) e pubblicato in due edizioni identiche nel

[3] Alcune osservazioni didattiche sono collegate al passaggio tra l'Algebra sincopata e l'Algebra simbolica; citiamo F. Arzarello, L. Bazzini e C. Chiappini: "Come osservato dalla Laborde, lo sviluppo di un linguaggio simbolico specializzato può spogliare di significato il linguaggio in cui l'attività algebrica si era precedentemente espressa. L'Algebra retorica e quella sincopata erano abbastanza facili da seguire e da capire. Ma il salto ad un sistema simbolico può nascondere i significati dei termini e delle operazioni che agiscono su di essi. Il linguaggio simbolico ha il potere di rimuovere molte delle distinzioni che il linguaggio naturale preserva, espandendo in questo modo la sua applicabilità. Ne risulta una certa debolezza semantica" (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 11; il riferimento è a: Laborde, 1982; si veda a tale proposito anche: Clement, 1982). Osservano G. Vergnaud, A. Cortes e P. Favre-Ortigue: "L'Algebra rappresenta per gli allievi un'importante rottura epistemologica rispetto all'Aritmetica. Questa rottura merita un'analisi dettagliata, in quanto molti allievi non entrano facilmente nel gioco della manipolazione simbolica e di conseguenza si allontanano dalla Matematica" (Vergnaud, Cortes & Favre-Ortigue, 1997, p. 253). "Nell'insegnamento quotidiano, l'Algebra assume due ruoli nettamente separati; infatti viene vista da una parte come generalizzazione dell'Aritmetica, dall'altra come sistema generale costruito su base sintattica" (Cannizzaro & Celentano, 1995, p. 80).

1572 e nel 1579 (due distribuzioni della stessa opera stampata).

Per presentare alcuni aspetti dell'opera di Bombelli ricordiamo la contesa sulla risoluzione delle equazioni di terzo grado (Carruccio, 1972). Essa è fatta risalire a due studiosi italiani, Girolamo Cardano, che scrisse *Ars Magna* (1545) e Nicolò Fontana, detto Tartaglia (1500-1557), autore di *Quesiti et invenzioni diverse* (1546), sebbene il primo a trovare una tecnica risolutiva per tali equazioni fu nel 1515 il bolognese Scipione del Ferro (1465-1526)[4], che morì senza pubblicare la scoperta (Frati, 1910; Maracchia, 1979, p. 18; Bottazzini, 1990, p. 3)[5].

Interessante è la poesia in cui Tartaglia espresse il metodo per la risoluzione di un'equazione di terzo grado (l'interpretazione è in notazione moderna):

"Quando che 'l cubo con le cose appresso	
Se agguaglia à qualche numero discreto	$x^3+px = q$
Trovan dui altri differenti in esso.	$p > 0, q > 0$
Da poi terrai questo per consueto	$q = u-v$
Che 'l lor produtto sempre sia uguale	
Al terzo cubo delle cose neto,	$uv = (p/3)^3$
El residuo poi suo generale	
Delli lor lati cubi ben sottratti	
Varrà la tua cosa principale".[6]	$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

[4] Notiamo che Del Ferro è ricordato per cinque volte da Bombelli nel manoscritto della sua *Algebra* (ritrovato da E. Bortolotti nel codice B.1569 della Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna).

[5] La controversia tra i matematici italiani per la priorità relativa fu lunga e, sostanzialmente, sterile. Molte delle talvolta vivacissime contese che videro opposti matematici di valore per simili questioni di priorità sono prive di senso: spesso i risultati matematici devono infatti essere considerati alla stregua di "scoperte collettive".

[6] Così prosegue la poesia di Tartaglia: "In el secondo de codesti atti / Quando che 'l cubo restasse lui solo / Tu osserverai quast'altri contratti, / Del numero farai due

Pertanto risulta sufficiente determinare *u* e *v* per ricavare la cercata radice *x*, e ciò può essere ottenuto attraverso le note tecniche relative ad equazioni di secondo grado (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, pp. 178-179). Ma sarà proprio la fondamentale semplificazione dei radicali $\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$ che, approfonditamente studiata da Bombelli, porterà ai risultati più significativi per la storia dell'Algebra (Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 62; Maracchia, 1979, p. 41; Freguglia, 1989). Scrive infatti G. Loria introducendo l'opera di Bombelli:

"Nelle ultime pagine del suo I libro egli fa compiere all'Algebra un mirabile sbalzo in avanti, assurgendo al livello di creatore del calcolo con numeri complessi. A tale scopo egli introduce le locuzioni *più di meno* e *meno di meno*, per indicare le unità $+i$ e $-i$, che abbrevia nelle scritture *pdm* e *mdm*; in conseguenza con la scrittura *R c* [2 *pdm* 2] egli rappresentò l'espressione che noi indichiamo con la scrittura $\sqrt[3]{2+2i}$. Per operare mediante i nuovi enti aritmetici stabilisce un certo numero di regole fondamentali, le quali non differiscono da quelle che oggi noi esprimiamo" (Loria, 1929-1933, pp. 316-317).

A tale proposito osserviamo che le prime origini del pensiero algebrico sono individuabili "nel momento in cui appare lo sforzo di trattare un processo computazionale in modo più generale" (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 10; si veda inoltre: Sfard, 1992). Sebbene questa annotazione sia principalmente didattica, ma non è difficile

---

part'à volo / Che l'una in l'altra si produca schietto / El terzo cubo delle cose in stolo / Dalla qual poi, per commun precetto / Torrai li lati cubi insieme gionti / Et cotal somma sarà il tuo concetto. / El terzo poi de questi nostri conti / Se solve col secondo se ben guardi / Che per natura son quasi congionti. / Questi trovai, et non con passi tardi / Nel mille cinquecente, quatro et trenta / Con fondamenti ben saldi e gagliardi / Nella città dal mare intorno centa" (Maracchia, 1979, pp. 24-25).

riconoscere che, anche dal punto di vista storico, lo sforzo degli algebristi (e tra questi un chiaro esempio è costituito da Rafael Bombelli) fu molto spesso orientato ad un progressivo ampliamento delle capacità computazionali (si veda inoltre: Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 9).

L'*Algebra* di Rafael Bombelli (distribuita con due date: 1572 o 1579)

2.2. L'*Algebra* di Bombelli dalla storia alla didattica

2.2.1. Il gruppo moltiplicativo di Bombelli

Riportiamo le “regole fondamentali” sopra ricordate nella formulazione originale di Rafael Bombelli” (Bombelli, 1572-1579, p. 169):

“Più via più di meno, fa più di meno.

Meno via più di meno, fa meno di meno.
Più via meno di meno, fa meno di meno.
Meno via meno di meno, fa più di meno.
Più di meno via più di meno, fa meno.
Più di meno via men di meno, fa più.
Meno di meno via più di meno, fa più.
Meno di meno via men di meno, fa meno”.

Tali regole sono così espresse, ai giorni nostri:

$(+1)(+i) = +i$
$(-1)(+i) = -i$
$(+1)(-i) = -i$
$(-1)(-i) = +i$
$(+i)(+i) = -1$
$(+i)(-i) = +1$
$(-i)(+i) = +1$
$(-i)(-i) = -1$

e possono essere riassunte nella tavola seguente (detta *tabella di Cayley*: Najmark & Stern, 1984, p. 10):

x	+1	-1	$+i$	$-i$
+1	+1	-1	$+i$	$-i$
-1	-1	+1	$-i$	$+i$
$+i$	$+i$	$-i$	-1	+1
$-i$	$-i$	$+i$	+1	-1

Esse corrispondono alle moderne regole di calcolo per l’unità immaginaria.

Notiamo che le “regole fondamentali” bombelliane ora ricordate portano alla considerazione del gruppo moltiplicativo (commutativo) ad elementi complessi:

$(\{+1; -1; +i; -i\}; \times)$

(Si tratta del gruppo delle radici quarte dell'unità, uno dei classici esempî di gruppo abeliano finito: Keiser, 1956, p. 1540; Machì, 1974, p. 15; Najmark, & Stern, 1984, p. 10). Esso può a ragione essere chiamato *gruppo di Bombelli*.

Si noti che Bombelli si era implicitamente occupato, alcune pagine prima, del sottogruppo di ordine due ({+1; -1}; x) del gruppo ora introdotto, enunciando le seguenti regole di calcolo (Bombelli, 1572-1579, p. 70: qui la scrittura "-1" è solo indicativa di una regola pratica: ricordiamo che all'epoca di Bombelli *non* erano esplicitamente considerati i numeri negativi):

"Più via più fa più.
Meno via meno fa più.
Più via meno fa meno.
Meno via più fa meno".

Tali regole sono così espresse, con la notazione in uso ai giorni nostri:

$$(+1)(+1) = +1$$
$$(-1)(+1) = -1$$
$$(+1)(-1) = -1$$
$$(-1)(-1) = +1$$

e possono essere riassunte nella tabella di Cayley:

x	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1

Esse corrispondono alle moderne "regole dei segni" e consentono di completare la tabella di Cayley del *gruppo di Bombelli*, sopra riportata[7].

---

[7] Com'è noto, il gruppo di Bombelli ({+1; -1; +*i*; -*i*}; x) è ciclico e ha per generatori sia *i* che -*i*. Tuttavia di tale proprietà non troviamo alcuna (né esplicita né

2.2.2. I numeri complessi tra intuizione e consapevolezza

Quanto riportato ci consente di affermare che l'*Algebra* di Bombelli è un'opera straordinariamente innovativa, nella storia della Matematica. Ma quale fu l'obiettivo valore e l'effettiva portata storica dell'introduzione bombelliana dei numeri complessi?

Non è semplice rispondere a tali domande. Certamente in Bombelli non troviamo una chiara e consapevole trattazione del corpo complesso; il matematico bolognese si limitò a segnalare la presenza di enti matematici utili per la risoluzione di un problema ben definito: la risoluzione di alcune equazioni algebriche[8]. Dobbiamo inoltre rilevare che i numeri complessi, in seguito alla diffusione dell'opera di Bombelli, non furono immediatamente accettati dalla comunità matematica come quantità numeriche vere e proprie; Bourbaki osserva esplicitamente un'iniziale "riluttanza" dei matematici tra il XVI e il XVII secolo e nota: "nonostante la loro riluttanza, i matematici si trovano per così dire costretti ad introdurre nei loro calcoli i numeri immaginari; a poco a poco del resto si va prendendo confidenza con il calcolo di questi numeri 'impossibili', come con quello dei numeri negativi" (Bourbaki, 1963, p. 68).

Anche D.J. Struik menziona un lungo periodo di adattamento e ricorda che "i numeri complessi persero un

implicita) indicazione nell'*Algebra*: Bombelli elenca le regole di calcolo per l'unità immaginaria in un ordine che non sembra riflettere quello che potrebbe portare all'intuizione della ciclicità del gruppo. Analogamente per il sottogruppo ({+1; -1}; x), generato da -1 (Bombelli, 1572-1579, pp. 70 e 169; Bombelli, 1966, pp. 62 e 133-134).

[8] Bombelli osserva esplicitamente che nella risoluzione delle equazioni di terzo grado a coefficienti reali ogni radice complessa è sempre accompagnata dalla sua coniugata (Bombelli, 1966, p. XLIX).

po' del loro carattere sovrannaturale, benché una loro completa accettazione si sia avuta soltanto nel diciannovesimo secolo" (Struik, 1981, p. 120)[9]. Lo stesso Bombelli non nasconde le proprie iniziali perplessità a proposito delle strane entità matematiche introdotte, che pure sembravano essere di estrema utilità per la trattazione del "caso irriducibile"[10]: poche righe prima di elencare le regole per la moltiplicazione dell'unità immaginaria, sopra ricordate, egli osserva francamente:

"Ho trovato un'altra sorte di R.c. legate molto differenti dall'altre, la qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti e numero... *la quale parerà a molti più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io*, sin che ho trovato la sua dimostratione in linee (come si dimostrerà nella dimostratione del detto Capitolo in superficie piana)" (Bombelli, 1572-1579, p. 169; Bombelli, 1966, p. 133, il corsivo è nostro)[11].

---

[9] "Tra la fine del XVI secolo e gli inizi del XVII sia Viète che Harriot rifiutarono leradici immaginarie... Nello stesso periodo anche Stevino, il divulgatore dei numeri decimali, comunicò le sue perplessità, affermando che era meglio lavorare su cose sicure piuttosto che affaticarsi su cose incerte (i numeri immaginari). Nel 1629 tuttavia il fiammingo Girard ammetteva fra le radici d un'equazione anche numeri immaginari... Wessel nel 1797 riuscì a rappresentare i numeri complessi come punti del piano cartesiano... Caddero allora le vecchie perplessità" (D'Amore & Oliva, 1993, pp. 235-236).

[10] Era così detto il caso in cui la risoluzione dell'equazione di terzo grado portava alla considerazione di quantità complesse.

[11] L'Autore si riferisce alla: "Dimostra tione di Cubo eguale a Tanti e numero in superficie piana" che "costituisce una dimostrazione generale di esistenza per le radici reali dell'equazione cubica, che non esclude il caso irriducibile" (Bombelli, 1572-1579, pp. 298-299; Bombelli, 1966, pp. 228-229). Bortolotti nota che "il Bombelli dapprima (come si vede nel manoscritto) ritenne di poter senz'altro applicare alle radici quadrate di numeri negativi le leggi di calcolo proprie delle radici aritmetiche di numeri positivi, e rappresentò i numeri immaginari sotto forma di radicali... Ma poi si accorse che questi erano enti di natura speciale, alla cui rappresentazione occorrevano simboli appropriati e pel cui calcolo occorreva stabilire speciale algoritmo" (Bombelli, 1966, p. XLVIII).

Ma tutto ciò non consente di liquidare la posizione bombelliana come un semplice esperimento, un brillante espediente tecnico per completare le tecniche risolutive messe a punto da del Ferro, da Cardano e da Tartaglia[12]. L'introduzione *formale* dell'unità immaginaria che troviamo nell'*Algebra* deve essere considerata non soltanto molto efficace, ma anche particolarmente moderna: Bombelli agisce da vero matematico quando accetta di considerare le "quantità" *più di meno* e *meno di meno* esattamente alla stregua di numeri. Egli sa bene di non poter considerare tali "quantità" come numeri reali, ma non rinuncia ad utilizzarle in chiave squisitamente astratta e si mostra perfettamente consapevole di ciò quando fissa esplicitamente le fondamentali regole per la loro moltiplicazione.

In effetti, "Bombelli considera i numeri complessi come 'combinazioni lineari' a coefficienti positivi di quattro elementi di base: 'più' (+1), 'meno' (-1), 'più de meno' (*i*) e 'meno de meno' (-*i*); in particolare egli pone come assioma che 'più' e 'più de meno' non si addizionino; prima apparizione, questa, dell'indipendenza lineare" (Bourbaki, 1963, pp. 91-92; il riferimento è a: Bombelli, 1572-1579, pp. 169 e 190; Bombelli, 1966 pp. 133 e 147). Dunque Bourbaki ricorda che, alcune pagine dopo la prima introduzione di *più di meno* e di *meno di meno* (con le regole di moltiplicazione), il matematico bolognese fa riferimento anche ad altre operazioni con le nuove entità introdotte. In particolare, Rafael Bombelli afferma l'impossibilità di addizionare numeri reali e immaginari nel passo seguente:

---

[12] Si veda: D'Amore & Oliva, 1993, p. 228. Anche Cardano, "pur ricorrendo a una certa cautela verbale", aveva preso in considerazione situazioni analoghe a quelle trattate da Bombelli, nota Bourbaki (1963, p. 91).

"Più con + di - non si può sommare, se non dire più + di - come se si dicesse sommisi +5 con + di -8, fa 5 + di -8 et il medesimo del - di -" (Bombelli, 1572-1579, p. 190; Bombelli, 1966 p. 147).

Pur senza voler forzare la mentalità matematica del tempo, potremmo dunque affermare con E. Bortolotti che Bombelli fissò la propria Aritmetica su di un vero e proprio sistema di proposizioni primitive, dando così prova di straordinaria lucidità e modernità: per quanto riguarda l'introduzione di i, "la preventiva assiomatica enunciazione che egli [Bombelli] ha fatto delle regole di calcolo per quel nuovo simbolo ci dà un esempio notevole di un'Aritmetica fondata su postulati opportunamente ed arbitrariamente scelti" (Bombelli, 1966, p. L).

Analoghe considerazioni possono essere svolte con riferimento al *gruppo di Bombelli*, precedentemente ricordato: da un lato, infatti, sarebbe azzardato e dunque difficilmente sostenibile attribuire al matematico bolognese la chiara e consapevole introduzione di una struttura algebrica importante e delicatissima come quella di gruppo tre secoli prima della definizione di Dedekind[13]. Ma è altrettanto evidente che Rafael Bombelli si rese praticamente conto di alcune proprietà vicine al concetto di gruppo: la stessa elencazione dei risultati di tutte (e soltanto) le moltiplicazioni (*via*) che legano gli elementi *più*, *meno*, *più di meno* e *meno di meno* indica una particolare attenzione per un ben definito insieme di oggetti matematici e per un altrettanto ben definito ambito operazionale.

[13] Cronologicamente, la teoria dei gruppi fu la prima branca dell'Algebra astratta a trovare una sistemazione; ci occuperemo brevemente di essa nell'ultimo paragrafo del presente capitolo.

2.2.3. L'introduzione didattica del concetto di gruppo

Con un importante lavoro (1994), E. Dubinsky, J. Dautermann, U. Leron e R. Zazkis hanno aperto "una discussione riguardante la natura della conoscenza nell'Algebra astratta, in particolare nella teoria dei gruppi, e come un individuo può sviluppare la comprensione di varî argomenti in tale campo" (Dubinsky, & Al., 1994, p. 267)[14]. Consideriamo ora il concetto di gruppo (nel lavoro citato troviamo considerazioni su molti concetti algebrici: Dubinsky & Al., 1994, p. 292). Gli Autori osservano che "la conoscenza di un individuo del concetto di gruppo dovrebbe includere la comprensione di varie proprietà matematiche e la costruzione indipendente di esempî particolari, tra i quali gruppi costituiti da elementi non esplicitamente indicati e da un'operazione binaria tale da soddisfare gli assiomi" (Dubinsky & Al., 1994, p. 268; Leron & Dubinsky, 1995).

In un recente articolo (1996), B. Burn sottolinea fortemente che la nozione di gruppo presentata in Dubinsky & Al. (1994) è introdotta mediante definizioni formali. In particolare, un gruppo è "un insieme con un'operazione binaria che soddisfa quattro assiomi [...] Gli autori espongono un punto di vista basato sulla teoria degli insiemi" (Burn, 1996, p. 375). Quindi Burn nota che "un'analisi basata sulla teoria degli insiemi è impostata mediante la sensibilità matematica del ventesimo secolo, applicata però ad argomenti matematici cronologicamente precedenti" (Burn, 1996, p. 375); pertanto egli suggerisce un'introduzione pre-assiomatica alla teoria dei gruppi (Burn, 1996, p. 375; Jordan & Jordan, 1994).

[14] Per quanto riguarda l'insegnamento basato sul computer software ISETL, presentato in Dubinsky & Al., 1994, si veda ad esempio: Dubinsky & Leron, 1994.

Dunque, secondo Burn, il concetto di gruppo può essere introdotto *prima* di fornire gli assiomi egli sottolinea l'importanza della considerazione delle simmetrie: Burn, 1996, p. 377; Burn, 1985; per quanto riguarda i concetti fondamentali della teoria dei gruppi, egli cita: Freudenthal, 1973).

In un altro recente lavoro (1997), E. Dubinsky & Al. rilevano che "la capacità di vedere il generale nel particolare è uno dei compiti più misteriosi e difficili per gli allievi" (Dubinsky & Al., 1997, p. 252; Mason & Pimm, 1984); a tale proposito, gli Autori ricordano le difficoltà incontrate dagli studenti con riferimento alle permutazioni ed alle simmetrie (Asiala & Al., 1996)[15].

Un'importante questione è dunque la seguente: è possibile (didatticamente utile) introdurre il concetto di gruppo mediante un'introduzione pre-assiomatica?

In questa sede non vogliamo dare una risposta completa a tale questione: vogliamo soltanto contribuire alla conoscenza dello sviluppo della comprensione del concetto di gruppo, con riferimento particolare ad un esempio storico. Ad esempio, la considerazione del *gruppo di Bombelli* può aiutare gli allievi nella comprensione del concetto di gruppo? In particolare: la considerazione delle "regole fondamentali" di Bombelli può portare gli studenti ad una comprensione consapevole[16] di *tutte* le proprietà sulle quali si basa il concetto di gruppo?

Esaminiamo il comportamento degli allievi: abbiamo proposto due test ad alcuni studenti della scuola secondaria superiore. Nel primo test, abbiamo soltanto citato le "regole fondamentali" di Bombelli; nel secondo, abbiamo dato le

---

[15] Essi citano inoltre: Breidenbach & Al., 1991; Zazkis & Dubinsky, 1996. Per quanto riguarda la visualizzazione, si veda: Zazkis & Al., 1996.

[16] Per quanto riguarda la consapevolezza, indichiamo: Tsamir & Tirosh, 1997; si potrebbe risalire addirittura a: Piaget, 1980.

"regole " di Bombelli ed abbiamo fornito la *tabella di Cayley*. Vogliamo dunque esaminare se le quattro proprietà che costituiscono la definizione di gruppo vengono comprese dagli allievi (con riferimento a Burn, sono introdotte dai termini: "chiuso", "associativo", "identità" ed "inverso": Burn, 1996, p. 372).

Abbiamo proposto il test a tre classi III *Liceo Scientifico* (allievi di 16-17 anni), 74 allievi, ed a tre classi IV *Liceo scientifico* (17-18 anni), 72 allievi (per un totale di 146 allievi), a Treviso. Al momento del test gli allievi conoscevano la definizione di i ($i^2 = -1$); essi non conoscevano però il concetto di gruppo.

Abbiamo diviso (casualmente) ogni classe in due parti, A e B; quindi abbiamo sottoposto agli allievi le seguenti schede. Nella scheda A (fornita agli allievi della parte A, per un totale di 73 allievi) ci siamo limitati a citare le "regole fondamentali" di Bombelli (in linguaggio moderno); nella scheda B (fornita agli allievi della parte B, per un totale di 73 allievi), abbiamo citato le "regole fondamentali" di Bombelli ed abbiamo fornito la *tabella di Cayley*. Mediante tale test vogliamo evidenziare:

- se la semplice considerazione di un esempio storico (senza un punto di vista basato sulla teoria degli insiemi) può essere utile ad introdurre il concetto di gruppo;
- l'eventuale differenza tra i risultati ottenuti nei due casi, ovvero senza e con la considerazione della *tabella di Cayley*.

Per quanto riguarda le quattro proprietà presenti nella definizione di gruppo, è possibile attendersi che la chiusura, l'associatività e la presenza dell'elemento neutro nell'insieme G = $\{+1; -1; +i; -i\}$ siano accettate da molti allievi: la chiusura appare chiaramente dalle "regole fondamentali" di Bombelli e dalla *tabella di Cayley*; le altre proprietà sono familiari all'allievo. La proprietà secondo la quale per ogni x appartenente a G, esiste un elemento x' appartenente a G tale che $xx' = x'x = 1$ può essere più delicata da essere riconosciuta.

Scheda A. Nel proprio capolavoro, *Algebra*, R. Bombelli di Bologna (1526-1572) ha enunciato le regole:

$(+1)(+1) = +1$ $(-1)\cdot (+1) = -1$ $(+1)(-1) = -1$ $(-1)(-1) = +1$

$(+1)(+i) = +i$ $(-1)\cdot (+i) = -i$ $(+1)(-i) = -i$ $(-1)(-i) = +i$

$(+i)(+i) = -1$ $(+i)(-i) = +1$ $(-i)(+i) = +1$ $(-i)(-i) = -1$

(qui le abbiamo riportate in simboli moderni).

Considera ora l'insieme G = {+1; -1; +i; -i}. Le seguenti affermazioni sono vere o sono false?

(1) Il prodotto di due elementi di G è sempre un elemento di G.

(2) La moltiplicazione in G è associativa.

(3) Esiste un elemento e appartenente a G tale che, per ogni x appartenente a G, $ex = xe = x$.

(4) Per ogni x appartenente a G, esiste un elemento x' appartenente a G tale che $xx' = x'x = e$.

Scheda B. Nel proprio capolavoro, *Algebra*, R. Bombelli di Bologna (1526-1572) ha enunciato le regole:

$(+1)(+1) = +1$ $(-1)\cdot (+1) = -1$ $(+1)(-1) = -1$ $(-1)(-1) = +1$

$(+1)(+i) = +i$ $(-1)\cdot (+i) = -i$ $(+1)(-i) = -i$ $(-1)(-i) = +i$

$(+i)(+i) = -1$ $(+i)(-i) = +1$ $(-i)(+i) = +1$ $(-i)(-i) = -1$

(riportate in simboli moderni). Dunque possiamo scrivere la tabella seguente:

×	+1	-1	+*i*	-*i*
+1	+1	-1	+*i*	-*i*
-1	-1	+1	-*i*	+*i*
+*i*	+*i*	-*i*	-1	+1
-*i*	-*i*	+*i*	+1	-1

Considera ora l'insieme G = {+1; -1; +*i*; -*i*}. Le seguenti affermazioni sono vere o sono false?

(1) Il prodotto di due elementi di G è sempre un elemento di G.

(2) La moltiplicazione in G è associativa.

(3) Esiste un elemento *e* appartenente a G tale che, per ogni *x* appartenente a G, $ex = xe = x$.

(4) Per ogni *x* appartenente a G, esiste un elemento *x'* appartenente a G tale che $xx' = x'x = e$.

Tempo: 10 minuti (abbiamo voluto proporre il problema 'a colpo d'occhio'). I risultati sono:

Scheda A

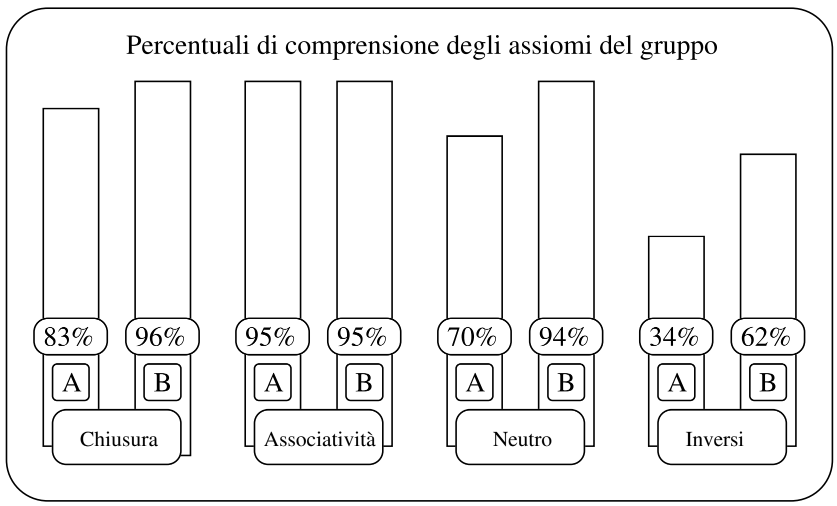
	vero		falso		no risposta	
(1)	61	83%	5	7%	7	10%
(2)	69	95%	0	0%	4	5%
(3)	51	70%	6	8%	16	22%
(4)	25	34%	18	25%	30	41%

Scheda B

	vero		falso		no risposta	
(1)	70	96%	1	1%	2	3%
(2)	69	95%	1	1%	3	4%
(3)	68	94%	1	1%	4	5%
(4)	45	62%	9	12%	19	26%

Possiamo dunque sottolineare che le proprietà 1, 2, 3 (chiusura, associatività, presenza dell'elemento neutro) sono ben comprese dagli allievi; per quanto riguarda le proprietà 1 e 2 ci sono piccole differenze tra la scheda A e la scheda B: sembra che la considerazione della *tabella di Cayley* abbia leggermente agevolato gli allievi. Per quanto riguarda la proprietà 4 (presenza degli inversi) la situazione appare diversa[17].

Riassumiamo i risultati (si tratta di una rappresentazione qualitativa: le differenze tra le percentuali nel test A e nel test B sono spesso modeste):



Abbiamo intervistato individualmente gli allievi (A: 48 allievi; B: 28 allievi) che non hanno considerato "vera" l'affermazione 4. Quasi tutti questi allievi hanno

[17] È noto che un sottomonoide moltiplicativo *finito* G del gruppo moltiplicativo **C*** dei numeri complessi non nulli è un sottogruppo (Jacobson, 1974, pp. 33; la sufficienza del test di chiusura, in questo caso, è sottolineata anche in: Burn, 1996, p. 373). Dunque, per quanto concerne il test precedente, sarebbe incoerente affermare la verità delle proprietà 1, 2, 3 e la falsità della proprietà 4. Tuttavia la proposizione ricordata non può essere nota agli studenti della scuola secondaria (Dubinsky & Al., 1997, p. 251).

semplicemente affermato di non essersi resi conto della presenza degli inversi soltanto dall'esame delle regole di Bombelli o della *tabella di Cayley*.

Dunque soltanto per alcuni allievi la considerazione dell'esempio storico ha determinato le reazioni sperate (o supposte): per questi casi, la procedura didattica utilizzata ha portato agli effetti ipotizzati. Anche per quanto riguarda questo caso, concludiamo che la considerazione di un esempio storico può essere utile per l'introduzione di un importante concetto matematico, ma le reazioni sperate si sono verificate soltanto per alcuni allievi.

Un'introduzione pre-assiomatica alla teoria dei gruppi può essere didatticamente utile (Jordan & Jordan, 1994), ma non sempre è tale da garantire un pieno apprendimento. Come precedentemente osservato, il problema è aperto: è possibile obiettare che la semplice proposta delle "regole fondamentali" di Bombelli non sia sufficiente per determinare un completo apprendimento del concetto di gruppo. Sottolineiamo infine che la ricerca sopra presentata è qualitativa: sarebbe dunque interessante identificare chiaramente i criteri di campionamento e le intuizioni degli allievi nella fase precedente il test (come osservato in: Burn, 1996, p. 371).

Citiamo infine ancora Dubinsky & Al. (1997), i quali affermano che "un punto di vista storico è utile per la ricerca didattica in teoria dei gruppi. La storia fa certamente parte della nostra metodologia, ma non possiamo limitarci a considerare soltanto chi provò che cosa e quando, ma anche i meccanismi che portarono al progresso della Matematica" (Dubinsky & Al., 1997, p. 252)[18].

---

[18] Secondo Piaget & Garcia (1983), c'è una stretta connessione tra lo sviluppo storico e lo sviluppo individuale a livello di meccanismi cognitivi.

2.3. L'*Algebra* euleriana

2.3.1. Leonhard Euler, un genio matematico

All'*Algebra* di Bombelli accosteremo idealmente un'opera di Leonhard Euler (1707-1783, latinizzato in Eulero), genio matematico del XVIII secolo.

Euler fu detto dai propri contemporanei *Princeps Mathematicorum*: non c'è parte della Matematica allora conosciuta (oltre al Calcolo differenziale ed integrale, ricordiamo la teoria dei numeri, la trigonometria, la Geometria analitica, l'Algebra, la Geometria pura, la Matematica applicata, la teoria dei giochi, la didattica e la divulgazione) che non abbia ricevuto da Euler un contributo essenziale (Weil, 1993). Per questo gli storici della Matematica ricordano la ben giustificata esortazione rivolta da Pierre Simon de Laplace (1749-1827), il creatore della teoria della probabilità, ai propri allievi: "Lisez Euler, c'est notre maitre à tous!" Anche Carl Friedrich Gauss (1777-1855), che come Euler sarà detto *Princeps Mathematicorum*, riconobbe i meriti del grande matematico svizzero ed affermò: "Lo studio delle opere di Euler rimane la miglior scuola nei diversi campi della Matematica e non può essere rimpiazzato da nient'altro" (Struik, 1981, p. 160).

Il manuale *Vollstandige Anleitung zur Algebra*, pubblicato nel 1770 (indichiamo l'edizione inglese del 1828, *Elements of Algebra*, con le note ed alcune importanti integrazioni di G.L. Lagrange: Euler, 1828), è dovuto alla felice penna di Euler; il carattere innovativo e l'efficacia didattica di quest'opera sono riconosciute da tutti gli storici; G. Loria, ad esempio, afferma che "ciò che rende l'Algebra di Euler di straordinario interesse dal punto di vista didattico è il numero, la varietà e l'eleganza dei problemi trattati" (Loria, 1929-1933, p. 704); la parte I contiene l'analisi delle "quantità determinate", la parte II contiene l'analisi delle "quantità indeterminate". Proprio in questa seconda sezione sono illustrate alcune tecniche particolarmente attuali: nel prossimo paragrafo presenteremo un classico ed elegante procedimento risolutivo per la risoluzione di alcune equazioni diofantee (Olds, 1963).

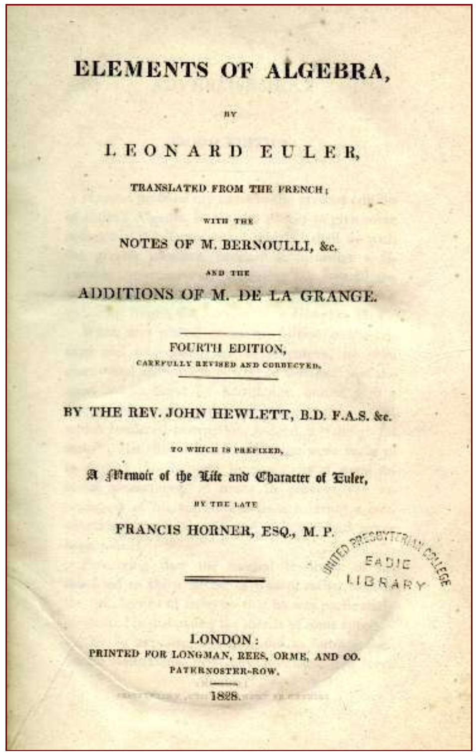
2.3.2. Un procedimento euleriano

> "La sua opera è la più vasta che esista nella storia della scienza, e comprende tutti i temi delle scienze e della tecnica. Insieme a Lagrange, Eulero ha dominato la Matematica del XVIII secolo per la varietà e la ricchezza delle sue scoperte".
>
> Jean Dieudonné

Riportiamo la presentazione che Euler premette alla sezione dedicata all'analisi delle "quantità indeterminate":

"È stato mostrato, nella prima parte di questo manuale, come una quantità incognita possa essere determinata da una singola equazione e come possiamo determinare due quantità incognite per mezzo di due equazioni, tre quantità incognite con tre equazioni e così via; pertanto dobbiamo considerare tante equazioni quante incognite siano da determinare. Dunque se un problema non fornisce tante equazioni quante sono le incognite da determinare, alcune di queste devono restare indeterminate... Ciò costituisce una speciale branca dell'Algebra, detta *Analisi Indeterminata*" (Euler, 1828, p. 299, la traduzione è nostra)[19].

[19] Euler considera, in questa presentazione, soltanto equazioni linearmente indipendenti. Inoltre quando si riferisce ad un numero di equazioni diverso da quello



ELEMENTS OF ALGEBRA,

BY

LEONARD EULER,

TRANSLATED FROM THE FRENCH;

WITH THE

NOTES OF M. BERNOULLI, &c.

AND THE

ADDITIONS OF M. DE LA GRANGE.

FOURTH EDITION,

CAREFULLY REVISED AND CORRECTED,

BY THE REV. JOHN HEWLETT, B.D. F.A.S. &c.

TO WHICH IS PREFIXED,

A Memoir of the Life and Character of Euler,

BY THE LATE

FRANCIS HORNER, ESQ., M. P.

LONDON:

PRINTED FOR LONGMAN, REES, ORME, AND CO.

PATERNOSTER-ROW.

1828.

L'*Algebra* di Leonhard Euler pubblicata a Londra nel 1828
con le aggiunte di Lagrange e le note di Bernoulli

Consideriamo ora l'equazione diofantea di primo grado (conn x, y interi) (Euler, 1828, pp. 299-310):

$$8x+5y = 81$$

Risolviamo l'equazione nella variabile con il minore coefficiente (qui è: y):

$$y = (81-8x)/5$$

Si dividano quindi per 5 i numeri 81 e 8, mettendo in evidenza i resti:

---

delle incognite, suppone che il numero delle equazioni sia minore di quello delle incognite.

$81 = 5\cdot 16+1$ $\qquad$ $8 = 5\cdot 1+3$

$$y = \frac{5\cdot 16+1-(5\cdot 1+3)x}{5} \qquad y = (16-x)+\frac{1-3x}{5}$$

$y = (16\cdot x)+t$

dove è stato posto:

$t = (1\text{-}3x)/5$ $\quad$ cioè $\quad$ $3x+5t = 1$

Si noti che anche t è intero. Dunque anche $3x+5t = 1$ è un'equazione diofantea. L'idea base del metodo euleriano è la seguente: le soluzioni (x; y) dell'equazione data sono collegate alle soluzioni di equazioni diofantee con i coefficienti minori di quelli della data.

Il procedimento può essere iterato. Si risolva l'equazione ottenuta nella variabile avente il minore coefficiente (si tratta della x):

$$x = \frac{1-5t}{3} \qquad x = \frac{1-(3\cdot 1+2)t}{3}$$

$$x = -t+\frac{1-2t}{3} \qquad x = -t+u$$

dove è stato posto:

$u = (1\text{-}2t)/3$ $\quad$ cioè $\quad$ $2t+3u = 1$

Si noti che anche u è intero. Dunque anche $2t+3u = 1$ è un'equazione diofantea.

Ripetiamo ancora il procedimento. Si risolva l'equazione ottenuta nella variabile con il minore coefficiente (t):

$$t = \frac{1-3u}{2} \qquad t = \frac{1-(2\cdot 1+1)u}{2}$$

$$t = -u+\frac{1-u}{2} \qquad t = -u+v$$

dove è stato posto:

$$v = (1\text{-}u)/2 \qquad \text{cioè} \qquad u+2v = 1 \qquad \text{cioè} \qquad u = 1\text{-}2v$$

Si noti nuovamente che anche v è intero. L'iterazione si interrompe quando il coefficiente della variabile dell'equazione in esame non interessata dalla posizione (in questo caso il coefficiente della u nell'equazione diofantea infine ottenuta) viene ad essere unitario.

Ricordando le espressioni di x e di y e tutte le posizioni effettuate:

$$y = (16\text{-}x)+t \qquad x = \text{-}t+u \qquad t = \text{-}u+v \qquad u = 1\text{-}2v$$

si perviene alle:

$$x = 2\text{-}5v \qquad\qquad y = 13+8v$$

le quali al variare di v risolvono l'equazione proposta. Ad esempio:

v	...	-2	-1	0	1	2	...
x	...	12	7	2	-3	-8	...
y	...	-3	5	13	21	29	...

Se all'equazione diofantea fosse associata la condizione di non negatività per x e per y, dovrebbe essere risolto il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2-5v \geq 0 \\ 13+8v \geq 0 \\ v \in \mathbf{Z} \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} -\frac{13}{8} \leq v \leq \frac{2}{5} \\ v \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

quindi v = -1, v = 0. Dunque le uniche coppie (x; y) accettabili sarebbero:

v	-1	0
x	7	2
y	5	13

2.3.3. Valutazione del procedimento euleriano

Il procedimento risolutivo sopra presentato appare corretto ed ingegnoso, e proprio in ciò riconosciamo la sua indubbia eleganza. L'impostazione di Euler è certamente brillante e moderna: l'uso dell'iterazione è sicuro, la ricerca di una soluzione è condotta con lucidità e con chiarezza. Particolarmente interessante è la scelta di ricondurre la risoluzione da un problema assegnato a quella di un problema analogo al dato, ma più semplice di esso.

Alcune osservazioni critiche, tuttavia, non possono essere omesse.

Dobbiamo innanzitutto rilevare che il metodo euleriano ora presentato non garantisce l'esistenza di soluzioni dell'equazione in esame; ad esempio, si può dimostrare che, data l'equazione $ax+by = c$ (con a, b, c numeri interi assegnati e con x, y interi incogniti), se a e b non sono coprimi, allora tutti i loro divisori comuni devono essere anche divisori di c: in caso contrario l'equazione diofantea considerata non ammette soluzioni (che ricordiamo devono essere intere).

La prova di ciò è molto semplice; se infatti poniamo: $a = na'$ e $b = nb'$ (con n, dunque, fattore comune di a e di b) risulta immediatamente: $na'x+nb'y = c$ quindi $n(a'x+b'y) = c$ e se c non ha come divisore n è immediato rilevare che quest'ultima uguaglianza è impossibile in $\mathbf{Z}$.

Non pensiamo che una constatazione come la precedente possa essere sfuggita all'acuto spirito di osservazione di Euler; eppure nell'*Algebra* essa non viene citata. È inoltre interessante rilevare che, con una breve precisazione (espressa in una nota: Euler, 1828, p. 301) viene affrontata una questione concettualmente molto vicina al problema della possibilità dell'equazione sopra considerata: in un esempio, infatti, Euler afferma che se $\frac{4y-2}{7}$ appartiene a **Z** allora anche $\frac{2y-1}{7}$ appartiene a **Z**; ebbene, egli ritiene necessario motivare esplicitamente tale implicazione.

Può sembrare sorprendente questa differenza di atteggiamento dell'Autore, che sceglie di motivare puntualmente alcuni passaggi della risoluzione, ma che non sembra preoccuparsi di una questione fondamentale quale l'esistenza delle soluzioni: una scelta di questo genere potrebbe addirittura essere considerata in termini negativi e dunque deprezzare il lavoro euleriano esaminato[20]. Eppure un comportamento come quello sopra descritto rientra nello "stile" di Euler e non deve pertanto stupire il lettore: il grande matematico svizzero infatti privilegiò costantemente la ricerca di risultati nuovi, di tecniche efficaci rispetto alla riflessione sui fondamenti della Matematica (Kline, 1991, Bagni, 1996, I). Ad esempio, le grandi ricerche euleriane sulle serie numeriche, che pure portarono a risultati di rara profondità, non furono sempre condotte con la prudenza e l'attenzione che i matematici di oggi indicano come indispensabili[21]. Euler talvolta agì guidato dal proprio talento, che mal sopportava di essere imbrigliato in questioni di principio, in sottili distinzioni formali o terminologiche: il problema del rigore, insomma, non fu tra i suoi interessi preferiti[22]. Non dobbiamo perciò meravigliarci se Euler scelse di concentrarsi sulla ricerca di

---

[20] Sottolineiamo inoltre che il procedimento descritto non è sempre il più breve per giungere alle soluzioni di un'equazione diofantea di primo grado (Olds, 1963).

[21] Rimandiamo il lettore al capitolo 4 (si veda: Struik, 1981, pp. 160-161).

[22] "Il rigore in Matematica è anch'esso un concetto 'storico' e dunque in divenire... Appellarsi all'esigenza del rigore nello spiegare lo sviluppo della Matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di nuovi *standard* di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica" (Bottazzini, 1981, p. 13).

una brillante soluzione al problema di Analisi indeterminata sopra presentato senza occuparsi preventivamente della sua esistenza[23].

2.3.4. Dopo Euler...

> "Galois riuscì a pubblicare solo alcuni frammenti... I suoi scritti riempiono poco più di una cinquantina di pagine a stampa, ma in essi si trovano esposte alcune delle idee più profonde della Matematica moderna, talvolta solo schizzate con un linguaggio conciso ed essenziale che ha sfidato la comprensione dei matematici ancora per una ventina d'anni dopo la morte dell'autore".
>
> Umberto Bottazzini

Dopo Euler la storia dell'Algebra spiccò il volo verso traguardi elevatissimi: "una volta liberata da ogni semantica esterna, l'Algebra ha proseguito il suo cammino verso la creazione di oggetti matematici sempre più astratti, nel filone della cosiddetta Matematica pura... Sicuramente si è molto lontani dalla visione della Matematica come ancella delle scienze naturali: ora appare solo regina delle proprie costruzioni" (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 21).

I protagonisti dell'Algebra moderna sono Paolo Ruffini (1765-1822) (Ruffini, 1807-1808), Niels Henrik Abel (1802-1829) (Abel, 1881), Evariste Galois (1811-1832), che indicò una condizione necessaria e sufficiente affinché

---

[23] Notiamo, sebbene il paragone richieda prudenza, la differenza tra l'entusiasta approccio euleriano alla risoluzione di un problema e la quasi timorosa introduzione delle operazioni ne *Larte de labbacho*, in cui l'anonimo Autore mai ritenne di poter omettere la dettagliata elencazione delle condizioni per l'eseguibilità di un'operazione.

un'equazione algebrica irriducibile sia risolubile per radicali[24].

Ricordiamo che, data un'equazione algebrica a coefficienti in **C**, si dice *campo di razionalità* di tale equazione il campo generato dai coefficienti (che è un sottocampo del campo complesso; il più piccolo campo di razionalità di un'equazione algebrica è **Q**); se inoltre si considera z appartenente a **C**, si dice *campo ampliato* mediante z del campo di razionalità dell'equazione considerata il campo generato dai coefficienti dell'equazione e da z. Tali concetti sono molto importanti per la precisazione delle nozioni di equazione riducibile e di equazione irriducibile.

Scrisse Galois (si veda l'opera omnia: Galois, 1897):

"Quando converremo di riguardare come note certe quantità, diremo che le aggiungiamo all'equazione che si tratta di risolvere. Diremo che queste quantità sono aggiunte all'equazione... Si vede inoltre che le proprietà e le difficoltà di un'equazione possono essere del tutto diverse a seconda delle quantità che le si sono aggiunte. Per esempio, l'aggiunzione di una quantità può rendere riducibile un'equazione irriducibile" (traduzione in: Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 113).

Galois introdusse quindi il *gruppo dell'equazione*, oggi denominato *gruppo di Galois*. Consideriamo un'equazione

---

[24] Galois era consapevole della scarsa utilità pratica del metodo ed osservava: "Se adesso voi mi date un'equazione scelta a vostro piacere, e di cui desiderate sapere se è o no risolubile per radicali, io non avrei niente da fare che indicarvi il mezzo di rispondere alla vostra questione, senza voler incaricare né me né alcun altro di farlo. In una parola, i calcoli sono impraticabili... Ma, la maggior parte delle volte, nelle applicazioni dell'Analisi algebrica, ci si riporta ad equazioni di cui si conoscono in anticipo tutte le proprietà: proprietà per mezzo delle quali sarà sempre agevole rispondere alla questione per mezzo delle regole che esporremo" (in: Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 118).

algebrica di grado n e siano x_1, x_2, x_3, ..., x_n le sue radici (distinte). Galois affermò che esiste sempre un gruppo di sostituzioni su x_1, x_2, x_3, ..., x_n tale che ogni espressione razionale delle radici che non varia per le sostituzioni di questo gruppo appartiene al campo di razionalità dell'equazione; inoltre, ogni espressione razionale delle radici non varia per queste sostituzioni. Tale gruppo (il gruppo simmetrico delle radici x_1, x_2, x_3, ..., x_n) si dice *gruppo di Galois* dell'equazione data. Riportiamo le conclusioni del matematico francese:

"Il gruppo G la cui equazione è risolubile per radicali si deve ripartire in un numero primo di gruppi H simili ed identici. Questo gruppo H in un numero primo di gruppi K simili ed identici, e così di seguito, fino ad un certo gruppo M che non conterrà più che un numero primo di sostituzioni. Reciprocamente se il gruppo G soddisfa alla condizione precedente l'equazione sarà risolubile per radicali" (traduzione in: Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 116).

In termini moderni, Galois stabilì che un'equazione algebrica (irriducibile) è risolubile per radicali se e soltanto se il gruppo simmetrico delle sue radici, detto il suo *gruppo di Galois*, è risolubile (un gruppo si dice risolubile se tutti i suoi fattori di composizione sono numeri primi, ovvero l'indice di ciascun sottogruppo della serie di composizione in quello che lo precede deve essere un numero primo). Si dimostra che il gruppo simmetrico di grado n (il gruppo di sostituzioni delle n radici, in generale distinte, di un'equazione algebrica di grado n) è risolubile per $2<=n<=4$ e non è risolubile per $n>4$ (Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 142). Pertanto le equazioni di grado n con $2<=n<=4$ sono risolubili per radicali; mentre le equazioni di grado $n>4$ non sono risolubili per radicali.

Riportiamo la descrizione dello stesso Galois relativa al gruppo simmetrico di grado 4 (ovvero all'equazione di quarto grado):

'È facile verificare questo percorso essenziale nella risoluzione delle equazioni generali di quarto grado. In effetti, questa equazione si risolve per mezzo di un'equazione di terzo grado, che esige essa stessa l'estrazione di una radice quadrata. Nella sequenza naturale delle idee, è dunque necessario cominciare da questa radice. In effetti, aggiungendo all'equazione di quarto grado questa radice quadrata, il gruppo dell'equazione che contiene in tutto 24 sostituzioni si decompone in due gruppi simili ed identici che non ne contengono che 12. Indicando con *a*, *b*, *c*, *d* le radici, ecco questo gruppo partendo dalla permutazione arbitraria *abcd*:

abcd	*acdb*	*adbc*
badc	*cabd*	*dacb*
cdab	*dbac*	*bcad*
dcba	*bdca*	*cbda*

e si vede che i tre gruppi nei quali lo abbiamo diviso sono simili ed identici. Poi per mezzo dell'estrazione di un radicale di terzo grado resta semplicemente il gruppo:

abcd
badc
cdab
dcba

Questo si divide di nuovo in due gruppi simili ed identici:

abcd	*cdab*
badc	*dcba*

Così per mezzo di un'estrazione di radice quadrata non si avrà altro che un'equazione il cui gruppo sarà:

abcd
badc

e che si risolverà infine per mezzo di una radice quadrata" (traduzione in: Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 207).

Dunque la visione di Galois andava ben oltre la portata del problema pratico: le sue idee contenevano spunti di enorme importanza (Kuga, 1993), che i matematici svilupparono solo progressivamente[25]. Con un termine introdotto nel 1895 da F. Klein, a Galois è dovuta l'*aritmetizzazione dell'Algebra* (analoga all'aritmetizzazione dell'Analisi; si veda: Bottazzini, 1981 e 1990).

Già negli anni immediatamente precedenti la pubblicazione degli ultimi lavori del geniale matematico francese (tra il 1844 e il 1846), Augustin Louis Cauchy (1789-1857) aveva scritto una ventina di articoli sui gruppi di trasformazioni. Anche Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), Enrico Betti (1823-1892) e Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) si occuparono a fondo delle idee di Galois (Bottazzini, 1990). Fu Dedekind che, riprendendo le idee di Galois, diventò il fondatore dell'Algebra astratta (Dedekind, 1990): ad esempio, fu lui che nel 1858 diede esplicitamente la corretta definizione di gruppo finito, derivata dalla considerazione dei gruppi di permutazioni.

[25] "Galois espose la condizione di risolubilità per radicali usando concetti della teoria dei gruppi che ancora non erano stati definiti... È appunto partendo dalle idee di Galois sulla teoria delle equazioni algebriche che, nella seconda metà del secolo scorso si sviluppò la teoria dei gruppi e, successivamente, quella delle altre strutture algebriche" (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, pp. 204-205).

Nel 1872 il norvegese Ludwig Sylow (1832-1918) pubblicò alcuni importanti teoremi sui gruppi, più tardi ripresi da Georg Ferdinand Frobenius (1849-1917) e da Otto Ludwig Hölder (1859-1937); nel 1878 Arthur Cayley (1821-1895) sottolineò che il concetto di gruppo doveva essere precisato indipendentemente dal problema combinatorio. Anche Félix Klein (1849-1925) e Sophus Lie (1842-1899) contribuirono in termini decisivi alla sistemazione del concetto algebrico di gruppo.

Per quanto riguarda le altre strutture algebriche, già negli scritti di Leopold Kronecker (1823-1891), di Eduard Kummer (1810-1893) e dello stesso Dedekind troviamo l'intuizione di tecniche collegate agli anelli (Boyer, 1982). Ma è nel XX secolo che venne messa a punto una moderna teoria degli anelli: in particolare, le opere di Joseph Wedderbrun (1882-1948) e di Emmy Noether (1882-1935) furono decisive per lo sviluppo della teoria degli anelli; Emil Artin (1898-1962) riprese la teoria di Galois sulla base dei moderni concetti di campo e di estensione (Bottazzini, 1990).

Per quanto riguarda infine i campi, dopo le prime intuizioni di Galois, un'organica sistemazione della teoria si ebbe soltanto nel 1893 con l'opera di Heinrich Weber (1842-1913) (Kline, 1991, II); in questo settore devono essere ricordati i fondamentali contributi, all'inizio del XX secolo, di Leonard Dickson (1874-1954) e di Edward Huntington (1874-1952).

Bibliografia del capitolo 2

Anglin, W.S. (1994), *Mathematics. A Concise History and Philosophy*, Springer Verlag, Berlin.

Arzarello, F.; Bazzini, L. & Chiappini, G. (1994), *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e* *considerazioni didattiche*, Progetto strategico del CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 6.

Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D.; & Thomas, K. (1996), A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1-32.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T. (1997), "Ma un passaggio non è il risultato...". L'introduzione dei numeri immaginari nella scuola superiore, *La matematica e la sua didattica*, 2, 187-201.

Bagni, G.T. (1998), History and Didactics of Mathematics, *ICMI Study*, Meeting of Luminy (preprint).

Barbieri, F. & Pepe, L. (a cura di) (1992), Bibliografia italiana di storia delle matematiche 1961-1990, *Bollettino di storia delle matematiche*, XII, 1.

Boero, P. (1992), Sulla specificità delle ricerche in didattica della matematica. Il caso del formalismo algebrico, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15, 10.

Bombelli, R. (1966), *L'Algebra*, Forti, U. & Bortolotti, E. (a cura di), Feltrinelli, Milano.

Bortolotti, E. (1925), L'Algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI, *Periodico di matematiche*, IV.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Bottazzini, U. (1981), *Il Calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).

Breidenbach, D.; Dubinsky, E.; Hawks, J. & Nichols, D. (1992), Development of the process conception of function, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.

Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Burn, B. (1996), What are the fundamental concepts of group theory?, *Educational Studies in Mathematics*, 31, 371 -377.

Burn, R.P. (1985), *Groups: a Path to Geometry*, Cambridge.

Burton, M.B. (1988), A linguistic basis for students' difficulties with Algebra, *For the learning of mathematics*, 8.

Calinger, R. (a cura di) (1996), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching*, Mathematical Association of America.

Cannizzaro, L. & Celentano, A. (1995), Rapporti fra Algebra aritmetica e Algebra simbolica: un test e una proposta di intervento nella scuola secondaria superiore, Bazzini, L. (a cura di), *La didattica dell'Algebra nella scuola secondaria superiore*, Atti del V Convegno Internuclei per la scuola secondaria superiore, Pavia, 16-18 marzo 1995, 80-83.

Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.

Castelnuovo, G. (1938), *Le origini del Calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna (ristampa: Feltrinelli, Milano 1962).

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, L.P.S., Grenoble.

Chevallard, Y. (1989), Arithmetique, algebre, modelisation, *Publications de l'IREM d'Aix -Marseille*.

Chiappini, G. & Lemut, E. (1991), Construction and interpretation of algebraic models, *Proceedings of PMA XV*, Assisi.

Clement, J. (1982), Algebra word problems solutions: thought processes underlying a common misconceptios, *Journal for Research in Mathematical Education*, 13.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1975), *Dal numero alla struttura*, Zanichelli, Bologna.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1976), *Gli interessi matematici*, Marsilio, Venezia.

D'Amore, B. & Oliva, P. (1993), *Numeri*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. & Speranza, F. (a cura di) (1989), *Lo sviluppo storico della matematica*, I, Armando, Roma.

D'Amore, B. & Speranza, F. (a cura di) (1992), *Lo sviluppo storico della matematica*, II, Armando, Roma.

D'Amore, B. & Speranza, F. (a cura di) (1995), *La matematica e la sua storia*, Angeli, Milano.

Dedekind, J.W.R. (1990), *Lezioni sulla teoria di Galois*, Sansoni, Firenze.

Dieudonné, J. (1989), *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano (*Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, Paris 1987).

Dubinsky, E.; Dautermann, J.; Leron, U. & Zazkis, R. (1994), On learning fundamental concept of group theory, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 3, 267-305.

Dubinsky, E.; Dautermann, J.; Leron, U. & Zazkis, R. (1997), A reaction to Burn's "What are the fundamental concepts of group theory?", *Educational Studies in Mathematics*, 34, 249-253.

Dubinsky, E. & Leron, U. (1994), *Learning Abstract Algebra with ISETL*, Springer, New York.

Dupont, P. (1981), *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale*, I-II Cortina, Torino.

Edwards, H.M. (1984), *Galois Theory*, Springer, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo.

Enriques F. & de Santillana, G. (1936), *Compendio di storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1973).

Enriques F. (1938), *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1982).

Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni, L. (a cura di), UTET, Torino.

Eves, H. (1983), *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997), Storia e didattica della matematica, *Lettera Pristem*, 23, 8-13.

Fauvel, J. (1990), History in the mathematical classroom, *The IREM papers*, The Mathematical Association.

Fauvel, J. (1991), *For the learning of Mathematics* (special number), 11, 2.

Feldman, C.F. & Toulmin, S. (1976), Logic and the theory of mind, Cole, J. K. (a cura di), *Nebraska symposium on motivation 1975*, University of Nebraska Press, Lincoln, London.

Frajese, A. (1969), *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, Firenze.

Franci, R. & Toti Rigatelli, L. (1979), *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano.
Frati, L. (1910), Scipione dal Ferro, *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, XII.
Freguglia, P. (1982), *Fondamenti storici della Geometria*, Feltrinelli, Milano.
Freguglia, P. (1989), *Ars Analytica*, Bramante, Busto Arsizio.
Freudenthal, H. (1973), What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education, Howson, A.G., *Developments in Mathematical Education, ICME-2*, C.U. Press, Cambridge,, 101-114.
Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.
Furinghetti, F. (1993), Insegnare matematica in una prospettiva storica, *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134.
Gagatsis, A. & Dimarakis, I. (1996), The limit concept; difficulties-obstacles of students' understanding, Gagatsis, A. & Rogers, L. (a cura di), *Didactics and History of Mathematics*, Erasmus, Thessaloniki.
Grugnetti, L. (1992), L'histoire des mathématiques: une expérience interdisciplinaire fondée sur l'histoire des mathématiques, *Plot*, 60, 17-21.
Jacobson, N. (1974), *Basic Algebra I*, Freeman, San Francisco.
Jordan, C. & Jordan, D. (1994), *Groups*, Arnold, London.
Juge, G. (1996), Derive, cubic equations and Italian mathematicians, *The International Derive Journal*, 3.
Keiser, C.J. (1956), The Group Concept, Newman, J.R. (a cura di), *The world of mathematics*, III, Simon and Schuster, New York, 1538-1557.

Kline, M. (1982), *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano (*Mathematics in western culture*, Oxford University Press, New York 1953).

Kline, M. (1985), *Matematica: la perdita della certezza*, Mondadori, Milano (*Mathematics: the loss of certainity*, Oxford University Press, New York 1980).

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York 1972).

Kuga, M. (1993), *Galois' dream*, Birkhäuser, Basel.

Laborde, C. (1982), *Language naturelle et écriture symbolique*, These, Universitè J. Fourier, Grenoble.

Leron, U. & Dubinsky, E. (1995), An abstract algebra story, *American Mathematical Monthly*, 102, 3, 227-242.

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Machì, A. (1974), *Introduzione alla teoria dei gruppi*, Feltrinelli, Milano.

Malara, N. (1995), Mutamenti e permanenze nell'insegnamento delle equazioni algebriche da un'analisi di libri di testo di Algebra editi a partire dal 1880, Bazzini, L. (a cura di), *La didattica dell'Algebra nella scuola secondaria superiore*, Atti del V Convegno Internuclei per la scuola secondaria superiore, Pavia, 16-18 marzo 1995, 110-123.

Malara, N.A. (1997), Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra, *La matematica e la sua didattica*, 2, 176-186.

Maracchia, S. (1979), *Da Cardano a Galois*, Feltrinelli, Milano.

Mason, J. & Pimm, D. (1984), Generic examples: seeing the general in the particular, *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.

Musil, R. (1995), *Il giovane Törless*, Newton Compton, Roma.

Najmark, M.A. & Stern, A.I. (1984), *Teoria delle rappresentazioni dei gruppi*, Editori Riuniti, Roma.

Neugebauer, O. (1974), *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli, Milano (*The exact sciences in Antiquity*, Brown Un. Pr., Providence Rhode Island 1957).

Nobre, S. (a cura di) (1994), *Meeting of the International Study Group on relations between History and pedagogy of Mathematics*, Blumenau, Brasile 25-27 luglio, UNESP.

Olds, C.D. (1963), *Continued Fractions*, Random House, New York 1963 (traduzione italiana, *Frazioni continue*, Zanichelli, Bologna 1968).

Pellerey, M. (1991), La ricerca in didattica della matematica, *Atti del Convegno "Processi cognitivi e problemi della ricerca didattica disciplinare"*, Milano.

Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I, 2, 23-33.

Pescarini, A. (1995), Dinamiche dell'educazione matematica, *Bollettino degli insegnanti di matematica Canton Ticino*, 30, 1-18.

Piaget, J. & Garcia, R. (1983), *Psychogenèse et histoire des sciences*, Flammarion, Paris.

Piaget, J. (1980), *Experiments in contradictions*, Chicago, The University of Chicago Press.

Rogers, L. (1997), Problem Solving ed 'Indagini" nei corsi di matematica. Alcuni esempi dalle scuole britanniche, Sulmona (in corso di stampa).

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (1992), The development of Algebra. Confronting historical and psychological perspectives, *Algebra working group*, ICME 7, Quebec.

Smith, D.E. (1959), *A source book in Mathematics*, Dover, New York (prima edizione: McGraw-Hill, 1929).

Speranza, F. (1990), Controindicazioni al riduzionismo, *La matematica e la sua didattica*, IV, 3, 12-17.

Stillwell, J. (1989), *Mathematics and its History*, Springer, New York.

Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).

Swetz, F.J. (1989), Using problems from the History of Mathematics in classroom instruction, *Mathematics teacher*, 82, 370-377.

Swetz, F.J. (1995), To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.

Tahta, T. (1985), On notation, *Mathematics teaching*, 112, 49-51.

Toti Rigatelli, L. (1989), *La mente algebrica. Storia dello sviluppo della teoria di Galois nel XIX secolo*, Bramante, Busto Arsizio.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1997), Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito, *La matematica e la sua didattica*, 2, 122-131.

Van der Waerden, B.L. (1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, Berlin.

Vergnaud, G.; Cortes, A. & Favre-Ortigue, P. (1997), Introduzione dell'algebra ai principianti "deboli": problemi epistemologici e didattici, *La matematica e la sua didattica*, 3, 253-271 (*Actes du Colloque de Sèvres:*

Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, 1987, 259-279).
Weil, A. (1980), History of Mathematics: why and how, Letho, O. (a cura di), *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, Helsinki 1978, I, 227-236.
Weil, A. (1993), *Teoria dei numeri. Storia e matematica da Hammurabi a Legendre*, Einaudi, Torino.
Zazkis, R.; Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996), Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D_4, *Journal for research in Mathematics Education*, 27, 4, 435-457.
Zazkis, R. & Dubinsky, E. (1996), Dihedral groups: a tale of two interpretations, *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 61-82.

Testi originali riferiti al capitolo 2

Abel, N. (1881), *Oeuvres complètes*, Grøndahl, Christiania.
Bombelli, R. (1572-1579), *L'Algebra, divisa in tre libri, con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica*, Rossi, Bologna.
Cardano, G. (1554?), *In Claudii Ptolemaei De astrorum judiciis*, libro I, manca l'indicazione della data, dell'editore e del luogo.
Euler, L. (1828), *Elements of Algebra, with the notes of M. Bernoulli, &c. and the additions of M. de La Grange*, Longman, Rees, Orme and Co., London.
Galois, E. (1897), *Oeuvres mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris.
Jacobi, C.G.J. (1839), *Canon arithmeticus*, Typis academicis, Berlino.
Ruffini, P. (1807-1808), *Algebra elementare* e *Appendice all'Algebra*, AA. VV. (1805-1808), *Corso di Matematiche*, Società Tipografica, Modena, III, 1-384, V, 1-275.

Tartaglia, N. (1606), *opere, cioè Quesiti, nova Scientia, Travagliata inventione, Ragionamenti sopra Archimede*, Manassi, Venezia.

Syllogismos.it
History and Epistemology for Mathematics Education
(Giorgio T. Bagni, Editor)