Συλλογισμός
Syllogismos

History and Epistemology for Mathematics Education
Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Libri e idee *(a cura di G.T. Bagni)*
Appunti di storia per la didattica della matematica

Capitolo 5
Matematica e...

5.1. Storia e Didattica della Matematica

5.1.1. La Storia della Matematica

A fianco delle ricerche più propriamente matematiche, ovvero riguardanti direttamente l'evoluzione e lo sviluppo dei principali settori della disciplina, è importante ricordare l'opera di alcuni Autori che si dedicarono a questioni intimamente collegate alla Matematica, come ad esempio alle molte applicazioni o alla riflessione sull'evoluzione storica della materia (Dauben & Scriba, 2002).

Tra i lavori storici pubblicati a stampa[1] ricordiamo il vasto trattato in cinque libri pubblicato nel 1742 da G. C.

---

[1] Il primo trattato di Storia della Matematica sembra dovuto all'aristotelico Eudemo da Rodi (IV sec. a.C.), un lavoro perduto, ma del quale ci è giunta notizia attraverso Proclo (410-485); nel XVI secolo, Petrus Ramus (nome latinizzato di Pierre

Heilbronner (1705-1747); pochi anni dopo (1758) vide la luce a Parigi la celebre *Histoire des Mathematiques* di Jean Etienne Montucla (1725-1799; lo stesso Autore, quattro anni prima, aveva pubblicato *Histoires des recherches sur la quadrature du cercle*). Il titolo completo dell'opera è *Histoire des Mathematiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau & le dèveloppenebt des principales dècouvertes, les contestations qu'elles ont fait naître, & les principaux traits de la vie des Mathématiciens les plus célebres*.

Interessante è l'ampia tavola riportata dall'Autore all'inizio dell'opera, nella quale si indicano i campi d'azione e le divisioni della Matematica; diamo la traduzione di tale tavola (Montucla, 1758, I, pp. xxvi-xxviii):

MATEMATICHE PURE

I. **ARITMETICA**, o scienza dei rapporti numerici.
Operazioni sui numeri. Scienza delle combinazioni, &c.

II. **GEOMETRIA**, o scienza dei rapporti d'estensione.
1. ORDINARIA. Elementi di Geometria.
Geometria pratica.
Trigonometria rettilinea e sferica.
2. TRASCENDENTE.
Finita. Teoria delle proprietà finite delle curve.
Sezioni coniche.

---

de la Ramée, 1515-1572) pubblicò la *Schola mathematicae*, la prima opera data alle stampe in cui viene organicamente presentata la storia della Matematica. L'urbinate Bernardino Baldi (1553-1617), in omaggio al proprio maestro, scrisse la *Vita di Federigo Commandino* e progettò una grande opera storica, *Cronica* (un ampio schema di tale opera, rimasta incompiuta, fu pubblicato postumo ad Urbino nel 1707). Pierre Raymond de Montmort (1687-1719) lavorò ad una *Storia della Geometria* e sottolineò ripetutamente l'importanza dello studio della Storia della Matematica (Loria, 1929-1933).

Teoria delle curve di genere superiore.
Infinitesimale. Metodo di esaustione degli Antichi.
Metodo degli indivisibili.
Quadrature, rettificazioni &c.

III. **ALGEBRA**, o scienza dei rapporti astratti delle grandezze.

1. FINITA.

Semplice o elementare.
Comprende la soluzione delle equazioni semplici e di secondo grado, le loro applicazioni ai problemi geometrici ed aritmetici.
Trascendente.
Comprende l'analisi delle curve, le costruzioni e risoluzioni di uguaglianze di grado superiore &c.

2. INFINITESIMALE.

Calcolo differenziale o *delle flussioni*. Metodo delle tangenti, dei massimi e minimi, degli sviluppi, &c.
Calcolo integrale o *delle fluenti*. Quadrature e rettificazioni delle curve. Misura dei solidi e delle loro superfici.
La ricerca dei centri di gravità, di oscillazione &c.
Calcolo esponenziale.

MATEMATICHE MISTE

I. **MECCANICA**, o scienza del movimento.

1. STATICA, o scienza dell'equilibrio.

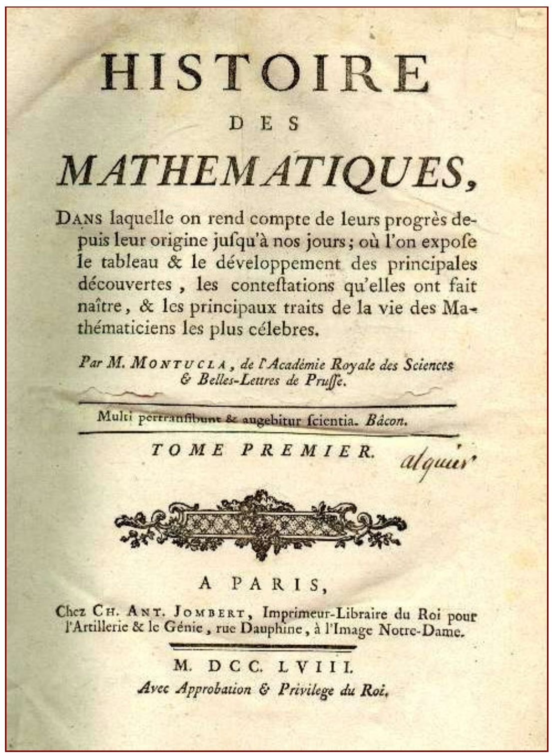
Statica propriamente detta,
o scienza dell'equilibrio dei solidi.
Idrostatica, o considerazione dell'equilibrio dei fluidi, o dei fluidi e dei solidi tra di loro.

2. DINAMICA, o scienza del movimento attuale.

Dinamica propriamente detta,
o scienza dei movimenti dei solidi.
Leggi dei movimenti e degli urti dei corpi.

Teoria delle forze centrali, &c. Balistica.
Teoria delle oscillazioni.

Idrodinamica, o scienza del movimento dei fluidi.
Idraulica o teoria della condotta e del movimento delle acque.
Navigazione o manovra dei vascelli.
Resistenza dei fluidi al movimento dei corpi in essi.



HISTOIRE
DES
MATHEMATIQUES,

DANS laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau & le développement des principales découvertes, les contestations qu'elles ont fait naître, & les principaux traits de la vie des Mathématiciens les plus célebres.

Par M. MONTUCLA, de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse.

Multi pertransibunt & augebitur scientia. *Bacon.*

TOME PREMIER.

alquier

A PARIS,
Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LVIII.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

La prima edizione (Paris, 1758) di *Histoire des Mathematiques* di Mobtucla

II. **ASTRONOMIA**, o scienza dei fenomeni celesti.
1. ASTRONOMIA SFERICA, o considerazione dei fenomeni generali in base alla forma apparente del cielo e della terra.

Geografia, o descrizione della terra in rapporto ai fenomeni che si manifestano nelle diverse parti di essa.

Navigazione, o arte di condurre i vascelli in base all'osservazione del cielo.

Cronologia, o sistemazione del tempo in base ai periodi celesti.

Gnomonica, o divisione dei tempi in base al movimento degli astri.

2. ASTRONOMIA TEORICA, o ricerca della sistemazione dell'Universo.

Determinazione della lunghezza dei periodi celesti.

Teoria del Sole, della Luna, dei pianeti superiori ed inferiori.

Calcolo delle eclissi e degli altri fenomeni.

Teoria dei diversi fenomeni Fisico-Astronomici.

III. **OTTICA**, o scienza della visione & delle proprietà della luce.

1. OTTICA propriamente detta, o scienza della visione diretta.
2. CATOTTRICA, o scienza della luce riflessa.
3. DIOTTRICA, o considerazione degli effetti della luce rotta.
4. PROSPETTIVA, o l'arte di rappresentare gli oggetti conformemente alle loro apparenze.

IV. **ACUSTICA**, o scienza delle proprietà del suono.

1. ACUSTICA propriamente detta, o considerazione delle proprietà del suono come prodotto da un fluido elastico.
2. MUSICA, o considerazione dei suoni nei loro reciproci rapporti.

Melodia, se si considerano le loro successioni.

Armonia, se si considerano i loro accordi.

V. **PNEUMATOLOGIA**, o considerazione delle proprietà dei fluidi elastici, pesanti &c.

Da questa tavola appare chiaro che la concezione della Matematica in Montucla (e, in generale, nel XVIII secolo) comprendeva anche le applicazioni.

L'opera è suddivisa in quattro parti: "I parte. Comprendente la storia delle Matematiche dai tempi più antichi fino alla caduta dell'Impero Greco... II parte. Comprendente la storia delle Matematiche presso diversi popoli Orientali... III parte. Comprendente la storia delle Matematiche presso i Latini & gli Occidentali, fino all'inizio del XVII secolo. IV parte. Comprendente la storia delle Matematiche durante il XVII secolo" (Montucla, 1758, I, pp. xxix-xxx).

Riportiamo infine la testimonianza di G. Loria, il quale ricorda la seconda edizione dell'opera (in parte postuma, curata dall'astronomo G. Lalande): "L' *opus magnum* di Montucla riscosse un così lusinghiero successo che, una nuova edizione essendosi manifestata necessaria, l'autore si accinse a rifondere il suo lavoro, arrecandovi notevoli aggiunte... L'*Histoire* di Montucla è realmente la prima opera degna di tal nome" (Loria, 1929-1933, p. 942)[2].

[2] Dopo Montucla, tra il 1796 ed il 1800 furono dati alle stampe i quattro tomi di un rigoroso lavoro storico di Abraham G. Kastner (1719-1800): questa grande opera, come la citata *Histoire des Mathematiques*, si occupa sia della Matematica pura che delle sue applicazioni. Un sommario di storiografia matematica non dovrebbe poi omettere i nomi di N. T. Reimer (1772-1832), autore dell'*Historia problematis de cubi duplicatione* (Gottinga, 1798), di C. Bossut (1730-1814), autore dell'*Essai sur l'histoire generale des mathematiques* (Parigi 1802) e del veronese Pietro Cossali (1748-1815), autore della *Storia critica dell'origine, trasporto in Italia e primi progressi in essa dell'Algebra* (pubblicata a Parma nel 1797), in cui sono raccolti alcuni pregevoli studi sull'opera di Fibonacci, di Pacioli, di Tartaglia, di Cardano e di Bombelli; specificamente della storia dell'Algebra si occupò anche il lucchese Pietro Franchini (1768-1837), con l'opera *La storia dell'Algebra e de' suoi principali scrittori* (Lucca 1837). Tra gli storici della Matematica deve essere inoltre ricordato Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813), il quale studiò in particolare l'opera di

5.1.2. I diagrammi di Eulero

Tra i lavori didattici e divulgativi ci occuperemo brevemente di un'insolita opera di Leonhard Euler (1707-1783), *Lettere ad una principessa d'Alemagna sopra diversi soggetti di fisica e di filosofia*, (ci riferiremo alla prima edizione italiana, pubblicata da Ferres a Napoli nel 1787; si tratta della seconda edizione dell'opera dopo quella originale in francese del 1772). In tale lavoro, già citato nel capitolo precedente, si trovano alcuni interessanti accorgimenti sulla rappresentazione grafica dei sillogismi, che saranno ripresi nel XIX e nel XX secolo.

Ricordiamo che negli *Analitici primi* si trovano le parti essenziali della sillogistica assertoria di Aristotele. Riportiamo innanzitutto la traduzione di alcuni passi aristotelici in cui viene descritto un sillogismo, considerati tra le principali fondamenta storiche della logica formale:

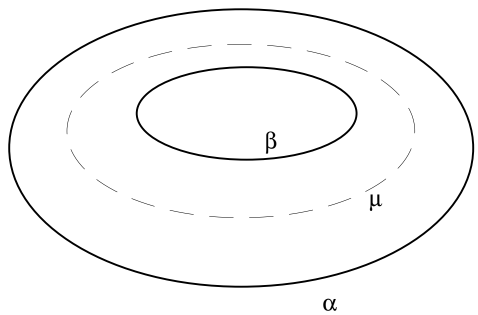
"Quando tre termini stanno tra loro in rapporti tali che il minore sia contenuto nella totalità del medio, e il medio sia contenuto, o non sia contenuto, nella totalità del primo, è necessario che tra gli estremi sussista un sillogismo... In effetti, se A si predica di ogni B, e se B si predica di ogni C,

---

Diofanto; nonché G. Libri, che pubblicò a Parigi nel 1838 *Histoire des Sciences mathematiques en Italie*. Ricordiamo inoltre il *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche*, pubblicato tra il 1868 e il 1887 da B. Boncompagni (1821-1894) ed analoghe iniziative curate da M. Cantor (1829-1920) e da G. Loria (1862-1954). Nel 1893 e nel 1928 fu pubblicata da P. Riccardi la *Biblioteca matematica italiana dalle origini della stampa ai primi anni del secolo XIX*. Chiuderemo infine con un elenco di studiosi (sebbene ciascuno degli autori che menzioneremo meriterebbe un approfondimento), che non possiamo non ricordare in relazione alla storia della Matematica: F. Hultsch (1833-1906), F. Casorati (1835-1890), H. Hankel (1839-1873), H.G. Zeuthen (1839-1920), P. Tannery (1843-1904), A. Favaro (1847-1922), S. Günter (1848-1932), J.L. Heiberg (1854-1928), G. Castelnuovo (1865-1952), E. Bortolotti (1866-1947), F. Enriques (1871-1946), R. Bonola (1874-1911), E. Rufini (1890-1924), E. Carruccio (1908-1980).

è necessario che A venga predicato di ogni C... Similmente poi, se A non si predica di nessun B, e se B si predica di ogni C, A non apparterrà a nessun C" (*Analitici Primi*, A4, 25b32 sgg., 37 sgg., 40 26a2, traduzione in: Bochenski, 1972, I, p. 90).

Modernamente, possiamo esprimere tale sillogismo in termini di inclusione insiemistica (e ricordare quindi la diffusa rappresentazione grafica):



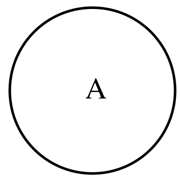
La rappresentazione di un sillogismo mediante diagrammi di questo genere è attribuita a Euler; disegni simili a questo, infatti, sono contenuti nell'opera in esame, *Lettres à une princesse d'Allemagne* (*Lettere ad una principessa d'Alemagna sopra diversi soggetti di fisica e di filosofia*: Euler, 1787)[3].

Esaminiamo ad esempio quanto Euler scrive nella lettera CII (datata 14 febbraio 1761), dopo avere ricordato la classificazione delle proposizioni aristoteliche:

"Per esprimere sensibilmente la natura di queste quattro spezie di proposizioni, possiam rappresentarle per mezzo di

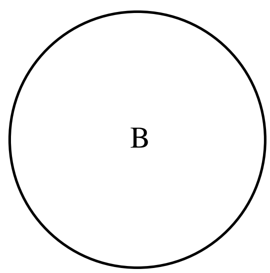
[3] Notiamo che la priorità cronologica per quanto riguarda l'uso di metodi di questo tipo spetta a G.W. Leibniz (D'Amore & Matteuzzi, 1975, pp. 24-25): i diagrammi leibniziani restarono però pressoché sconosciuti fino al 1903. Nel 1860, J. Venn indicò l'uso di diagrammi di forma ellittica per indicare le classi (contrassegnando con un asterisco le classi non vuote: Bochenski, 1972, I, p. 341).

figure, le quali son di un gran soccorso per ispiegare con somma distinzione qual sia l'esattezza di un raziocinio. E poiché una nozione generale contiene un'infinità di oggetti individuali, si può supporre a guisa di uno spazio, in cui questi oggetti son racchiusi: per esempio si forma uno spazio per la nozione di *uomo* (*Tav. 1. fig. 1.*) in cui si suppone che tutti gli uomini sien radunati.



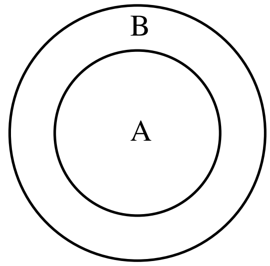
Tav. 1. fig. 1.

Per la nozione di *mortale* se ne forma un altro (*Tav. 1. fig. 2.*) dove si suppone che sia compreso quanto vi è di mortale.



Tav. 1. fig. 2.

E quando io pronunzio che *tutti gli uomini son mortali*, intendo che la prima figura sia contenuta nella seconda.



Tav. 1. fig. 3.

Dunque la rappresentazione di una proposizione universale affermativa sarà quella della *Tav. 1. fig. 3.*, in cui lo spazio A che dinota il soggetto della proposizione vien tutto intero racchiuso nello spazio B che è il predicato" (Euler, 1787, II, p. 111-112).

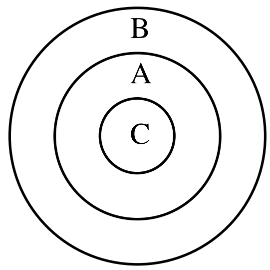
E nella successiva lettera CIII (datata 17 febbraio 1761) Euler scrive:

"Questi cerchj o sien questi spazj (imperciocché è indifferente qualunque figura lor si dia) son molto a portata per facilitare le nostre riflessioni sopra questa materia, e per metterci in chiaro quanti misteri la logica si vanta di avere, i quali somma pena han costata per poterli dimostrare, mentre coll'ajuto di tai segni in un istante tutto salta agli occhi... Quanto sin qui si è detto può essere sufficiente a far capire a Vostra Altezza , che tutte le proposizioni possono essere rappresentate con figure; ma il massimo vantaggio si manifesta ne' raziocinj, i quali qualora si esprimon con parole chiamansi *sillogismi*, in cui si tratta di tirare una conclusione esatta da alcune date proposizioni. Con tale invenzione noi potremo subito scandagliare le giuste forme di tutti i sillogismi.

Cominciamo da una proposizione affermativa universale *ogni A è B*... Se la nozione C è contenuta interamente nella nozione A, sarà contenuta anche interamente nello spazio B (*Tav. 1. fig. 8.*), donde risulta questa forma di sillogismo

	Ogni A è B
Ma	Ogni C è A
Dunque	Ogni C è B

e quest'ultima è la conclusione



Tav. 1. fig. 8.

Per esempio. Disegni la nozione A tutti gli alberi, la nozione B tutto ciò che ha radici, e la nozione C tutti i ciriegi, in tale caso il nostro sillogismo sarà il seguente

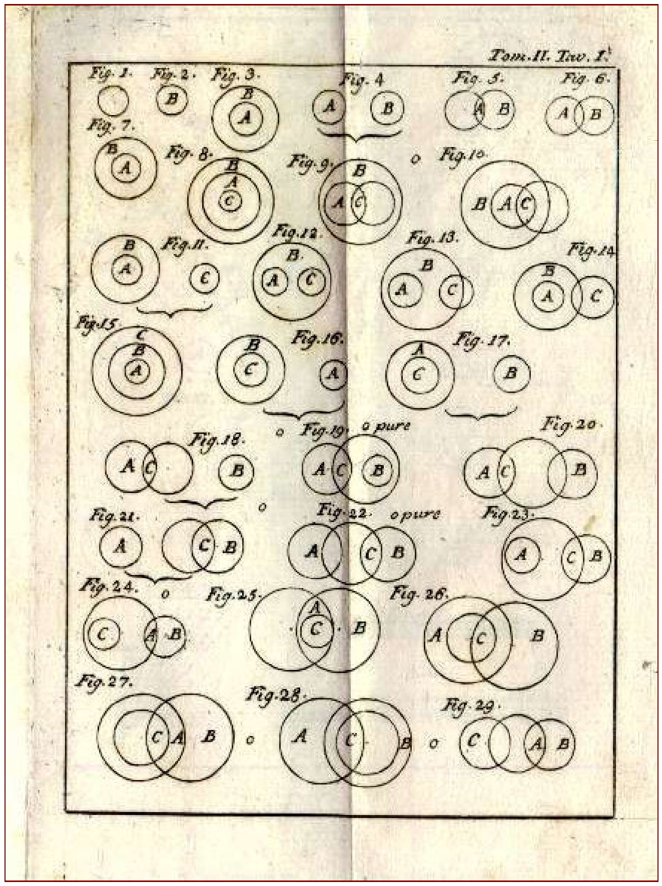
	Ogni arbore ha radici
Ma	Ogni ciriegio è un arbore
Dunque	Ogni ciriegio ha radici"

(Euler, 1787, II, pp. 113 e 115-116).

Le caratteristiche innovative della rappresentazione proposta da Euler non necessitano di commenti: l'uso di diagrammi per visualizzare insiemi non differisce da quello che troviamo nei libri di testo in uso attualmente.

Pur ritenendo necessario contestualizzare ogni espressione matematica nell'ambiente socio-culturale del proprio periodo storico, notiamo che la redazione delle lettere ora citate precede di oltre un secolo la pubblicazione dei lavori di Georg Cantor sulla teoria degli insiemi[4].

[4] La teoria degli insiemi è certamente uno dei cardini della Matematica moderna ed il suo sviluppo sulla base dell'impostazione di Georg Cantor (1845-1918) va ben al di



Dalla prima ed. italiana di *Lettere ad una principessa d'Alemagna* (Napoli 1787, seconda ed. dopo quella originale del 1772), la tavola in cui Euler ha introdotto la rappresentazione, oggi diffusissima, per indicare gli insiemi

---

là degli accorgimenti di Euler per la rappresentazione grafica di insiemi. Importante per la precisazione del concetto di insieme deve essere considerata l'opera *I paradossi dell'infinito* (pubblicata postuma nel 1851) del boemo Bernhard Bolzano (1781-1848); la nascita ed i primi fondamentali sviluppi della teoria degli insiemi sono però legati al nome di Cantor. Egli espose la propria impostazione ed i proprî risultati in numerosi articoli, pubblicati a partire dal 1874; ma l'aperta ostilità di alcuni matematici suoi contemporanei, ed in particolare lo scetticismo di Leopold Kronecker (1823-1891), influente professore dell'Università di Berlino, ostacolò inizialmente la diffusione e l'accettazione delle idee cantoriane.

5.2. Le applicazioni dell'Analisi: Laplace

5.2.1. La *Exposition du Système du monde* e la *Mécanique céleste*

"L'Analisi algebrica ci fa presto dimenticare l'oggetto principale [della ricerca] focalizzando la nostra attenzione sulle combinazioni astratte ed soltanto alla fine torniamo all'obiettivo originale... Tale è la fecondità dell'Analisi che è sufficiente tradurre verità particolari in questo linguaggio universale per veder emergere dalla loro stessa espressione una moltitudine di nuove ed insospettate verità".

Pierre Simon de Laplace

L'evoluzione storica delle applicazioni della Matematica è vasta e sarebbe impossibile riassumerla in poche pagine. Per dare di essa un'introduzione esamineremo alcune opere di Pierre Simon de Laplace (1749-1827), che applicò le proprie conoscenze di Analisi ottenendo risultati di assoluta importanza, soprattutto nella Meccanica celeste e nella Teoria della Probabilità[5].

[5] "Laplace... era interessato a qualunque cosa potesse servire per interpretare la natura. Laplace si occupò di idrodinamica, della propagazione delle onde e delle maree. Nel campo della chimica, le sue ricerche sullo stato liquido della materia sono diventate classiche. I suoi studi sulla tensione dello strato superficiale dell'acqua, che tengono conto dell'innalzamento dei liquidi in un tubo capillare e delle forze coesive dei liquidi, sono fondamentali" (Kline, 1991, I, p. 579). Il trattato *Mécanique céleste* in cinque volumi, pubblicati tra il 1799 ed il 1825 (preceduto da *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes*, 1782), è un'opera di estrema importanza, nella quale sono trattati matematicamente con piena correttezza i moti dei corpi celesti, sulla base dello studio degli effetti del campo gravitazionale; in tale lavoro confluirono molti risultati di Newton, di Clairaut, di d'Alembert, di Euler, di Lagrange e, naturalmente, dello stesso Laplace (sebbene l'Autore "trascurò spesso di

Laplace non fu propriamente un matematico puro; molti metodi da lui introdotti ebbero vastissima diffusione e sono peraltro utilmente impiegati anche ai giorni nostri; ma anche nelle sue opere più importanti troviamo spesso omissioni di parti rilevanti, dimostrazioni incomplete, come se l'Autore fosse interessato più all'applicazione della tecnica messa a punto che alla sua giustificazione teorica (Kline, 1991, I, p. 579). L'opera di Laplace riflette dunque una concezione strumentale della Matematica, che viene ad essere un supporto (estremamente perfezionato) per affrontare e risolvere altri problemi scientifici.

In questa sezione ci occuperemo dei principali lavori di Laplace nei campi sopra accennati, ovvero la Meccanica celeste e la Teoria della Probabilità: come vedremo anche nel paragrafo successivo, l'Autore ritenne opportuno affiancare ai proprî grandi trattati specialistici (ricchi di applicazioni e di sviluppi matematici) altre opere, certamente di notevole importanza, che oggi chiameremmo di alta divulgazione (Struik, 1981, p. 175).

In particolare, uno schema dei lavori ora ricordati è il seguente:

Meccanica celeste

1796. *Exposition du Système du monde*
(non specialistico)

1799-1825. *Mécanique céleste*
(specialistico)

---

citare la fonte dei suoi risultati, lasciando così l'impressione che essi fossero tutti dovuti a lui stesso": Kline, 1991, I, p. 578). "La pubblicazione della *Mécanique céleste* di Laplace viene solitamente considerata come il punto di arrivo culminante della concezione newtoniana della gravitazione... Laplace non solo sviluppò le parti dei *Principia* di Newton che trattavano i problemi della gravitazione, ma anche altri punti di carattere più prettamente fisico... Per Laplace la natura costituiva l'essenza, e la Matematica rappresentava soltanto un bagaglio di strumenti" (Boyer, 1982, pp. 572 e 573).

Teoria della Probabilità

1812. *Theorie Analytique des Probabilités* (specialistico)

1814. *Essay philosophique sur les probabilités* (non specialistico)

Notiamo dunque che il trattato specialistico di Meccanica celeste fu preceduto dall'*Exposition du Système du monde*[6], mentre il trattato specialistico sulla Teoria della Probabilità venne pubblicato due anni prima dell'*Essay philosophique sur les probabilités*.

Pur senza occuparci dell'esame dettagliato dell'impostazione e del contenuto dell' *Exposition du Système du monde*, ricordiamo che "la grande importanza di questa bella opera risiede nel perfetto rigore e nella grande chiarezza del raziocinio, congiunti con uno stile puro, limpido ed efficace. L'opera termina con una breve, ma compendiosa storia dell'astronomia e con l'esposizione di quella celebre ipotesi sopra la formazione del sistema planetario, largamente adottata in tutto il secolo XIX, come «ipotesi di Laplace»" (Armellini, 1933, p. 529).

Dunque Laplace fu anche un eccellente letterato, uno scrittore piacevole, attento, incisivo: una personalità davvero affascinante (sebbene alcuni storici abbiano rilevato che alcuni suoi atteggiamenti non furono sempre all'altezza delle sue incontestate capacità) [7].

---

[6] Il primo libro dell'opera si intitola *Dei movimenti apparenti dei corpi celesti* (Laplace, 1813, pp. 2-102). Il secondo libro si intitola *Dei movimenti reali dei corpi celesti* (Laplace, 1813, pp. 103-142). Il terzo libro si intitola *Delle leggi del movimento* (Laplace, 1813, pp. 143-190). Il terzo libro si intitola *Della teoria della gravitazione universale* (Laplace, 1813, pp. 191-357). Il quinto libro è dedicato ad una breve storia dell'astronomia (Laplace, 1813, pp. 358 -448).

[7] "[Laplace] durante la Rivoluzione prese parte all'organizzazione sia dell'École Normale sia dell'École Polytechnique. Napoleone gli conferì molte onorificenze, ma lo stesso vale anche per Luigi XVIII. Contrariamente a Monge e Carnot, Laplace

Nel paragrafo seguente accenneremo ad un campo di ricerca nel quale i lavori di Laplace sono considerati fondamentali: la Teoria della Probabilità.

5.2.2. Laplace nella Storia della Probabilità

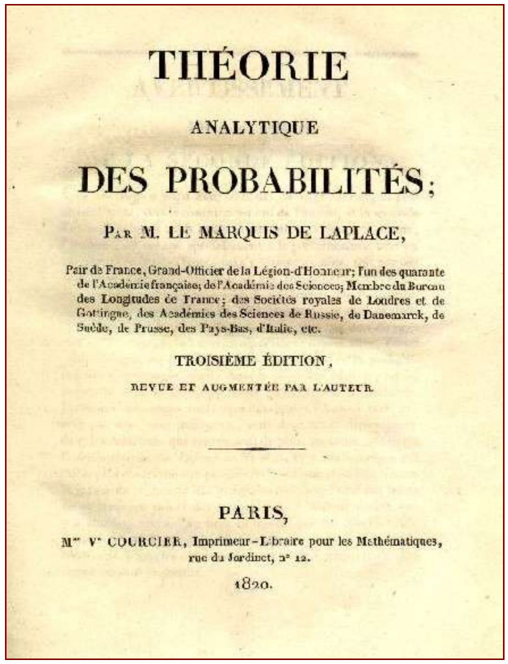
> "La differenza di opinioni dipende anche dal modo con il quale si determina l'influenza dei dati che sono noti. La Teoria delle Probabilità dipende da considerazioni così delicate, che non è sorprendente che con gli stessi dati si.possa giungere, da parte di due persone, a risultati differenti fra loro soprattutto nelle questioni molto complicate".
>
> Pierre Simon de Laplace

La Teoria della Probabilità fu uno dei più importanti campi di ricerca della Matematica del XIX secolo (si veda: Kolmogorov & Yushkevich, 1992): sebbene, come vedremo, le prime opere su tale argomento siano molto più antiche (la possibilità di matematizzare alcune situazioni dominate dal caso o dall'incertezza ha sempre esercitato un netto fascino sui ricercatori), una chiara e moderna impostazione matematica delle questioni collegate alla Teoria della Probabilità fu precisata soltanto nei primi decenni dell'Ottocento. E proprio nell'opera di Laplace

---

mutava senza troppe difficoltà la propria fede politica, il tutto non senza una punta di snobismo; ma questa sua disinvoltura gli consentì comunque di continuare la sua attività puramente matematica malgrado tutti i mutamenti politici allora avvenuti in Francia" (Struik, 1981, p. 174). Osserva inoltre G. Armellini: "Laplace ha recato alla scienza contributi importantissimi. E ciò compensa i suoi difetti di carattere, specialmente l'eccessiva ambizione, che lo rese spesso ingiusto verso i suoi emuli e avversarî" (Armellini, 1933, p. 529).

possiamo individuare il momento centrale, decisivo di questa importante fase evolutiva.


THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS;

PAR M. LE MARQUIS DE LAPLACE,

Pair de France, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur; l'un des quarante de l'Académie française; de l'Académie des Sciences; Membre du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue, des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, des Pays-Bas, d'Italie, etc.

TROISIÈME ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, rue du Jardinet, n° 12.

1820.

L'edizione del 1820 della *Theorie Analytique des Probabilités* di Laplace

Se Pierre Simon de Laplace deve essere considerato il primo grande studioso di Teoria della Probabilità in senso moderno[8], dobbiamo tuttavia ricordare che i principali

[8] Nella *Theorie Analytique des Probabilités* sono contenute le trasformate di Laplace di numerose funzioni; ricordiamo che la trasformata di Laplace di $f(x)$ è la funzione espressa da $Lf(x) =$ e risulta di grande attualità in molti campi dell'Analisi moderna (ad esempio per le equazioni differenziali e per le equazioni integrali: Kolmogorov-Fomin, 1980; Rudin, 1975). Molti sono gli sviluppi matematici interessanti nella *Theorie Analytique des Probabilités*; ad esempio troviamo l'integrale improprio: (già riferibile a De Moivre, nella forma: ; mediante esso si calcola l'area sottesa dal grafico della funzione densità di probabilità di una distribuzione normale: Bottazzini, 1990, p. 26). Scrive C.B. Boyer: 'Il metodo con cui [Laplace] ottenne questo risultato era abbastanza artificioso, ma non era molto diverso

concetti probabilistici si sono progressivamente formati nel corso degli ultimi quattro secoli. L'evoluzione storica delle nozioni e dei procedimenti che stanno alla base della Teoria della Probabilità può essere suddivisa in cinque periodi (che riassumeremo, senza pretese di completezza, nel seguente sommario, liberamente ripreso da: Lakoma, 1998b):

- la preistoria, ovvero il periodo fino a Pascal ed a Fermat, in cui venivano considerati alcuni semplici problemi tratti dall'esperienza quotidiana. Dopo le prime osservazioni medievali sui lanci di dadi, nella *Summa* di L. Pacioli (1445?-1515?) del 1494 e nei lavori cinquecenteschi di G. Cardano (1501-1570) e di N. Fontana Tartaglia (1499-1557) troviamo riferimenti a problemi di soggetto probabilistico; Cardano, ad esempio, studiò il numero dei risultati possibili nel lancio contemporaneo di più dadi; anche G. Galilei (1564-1642), come vedremo, si occupò di tale questione;
- la nascita della Teoria della Probabilità come scienza, dalla seconda metà del XVII secolo fino all'inizio del XVIII: in questo periodo hanno preso corpo i concetti di Probabilità e di valore atteso. Alcune questioni collegate ai giochi furono proposte da A. Gombaud di Méré (1610-1685) a B. Pascal (1623-1662; si veda: Ore, 1960) e questi ne fece oggetto di un interessante scambio epistolare con P. de Fermat (1601-1665); nel 1656 fu pubblicato *De ratiociniis in ludo alæ* di C. Huygens (1629-1695);
- dal 1713 alla prima metà del XIX secolo: nel 1713 fu infatti pubblicata *Ars Conjectandi*, opera postuma di Jacques Bernoulli (1654-1705), la prima opera organica sul Calcolo delle Probabilità, con importanti elementi di calcolo combinatorio e con la considerazione della legge dei grandi numeri (sull'argomento segnaliamo un ricco

---

dal metodo moderno di trasformare: in coordinate polari ottenendo: il cui valore... porta a: "(Boyer, 1982, p. 570).

epistolario Bernoulli-Leibniz: Raymond, 1979; nella prima parte dell'opera è ristampato il trattato di Huygens: Struik, 1981, p. 155). Nel 1714 P.R. de Montmort pubblicò *Essay d'analyse sur le jeux d'hasard* ; nel 1718, A. De Moivre (1667-1754) pubblicò *Doctrine of Chanches or a Method of calculating the Probabilities of Event in Play* (nel 1711 lo stesso Autore aveva pubblicato *De mensura sortis*); nel 1812 comparve la *Theorie Analytique des Probabilités* di P.S. de Laplace (faremo riferimento all'edizione del 1820, l'ultima direttamente curata dall'Autore); il breve *Essay philosophique sur les probabilités* (*Saggio filosofico sulle probabilità*: Laplace, 1987) fu premesso all'opera principale a partire dalla seconda edizione;

- la seconda metà del XIX secolo, con la Scuola di Pietroburgo e la ricerca di basi fondazionali (Kolmogorov & Yushkevich, 1992);
- i giorni nostri, con l'assiomatica di A.N. Kolmogorov (1903-1987) e le diverse impostazioni teoriche (von Mieses, de Finetti; si veda: de Finetti, 1995).

La formazione dei concetti probabilistici, tuttavia, non fu esente da difficoltà e da errori. Ricordiamo ad esempio che anche un pensatore del calibro di J. d'Alembert (1717-1783) non distingueva tra casi equiprobabili e non equiprobabili, errore che ritroviamo, oggi, anche nei comportamenti di alcuni studenti[9].

---

[9] Una completa rassegna delle molte ricerche sull'introduzione didattica dei concetti probabilistici esula dagli scopi del presente lavoro (a tale riguardo, rinviamo ad esempio alla prima parte di: Gagatsis, Anastasiadou & Bora-Senta, 1998). Citiamo tuttavia alcune importanti ipotesi formulate da E. Fischbein (1975 e 1984) sull'ontogenesi del comportamento probabilistico. Egli innanzitutto ipotizza l'esistenza di un sostrato naturale intuitivo per la probabilità, anche in bambini in età pre-operazionale; esso deve però essere distinto dalle intuizioni secondarie, che possono essere prodotte da una formazione sistematica. Fischbein conclude che l'insegnamento della probabilità dovrebbe iniziare non oltre il periodo di

5.2.3. I concetti probabilistici prima di Laplace: il *giuoco della zara* e le perplessità dei gentiluomini fiorentini

La seguente citazione ci consentirà di introdurre il *giuoco della zara*, che rivela che una qualche sensibilità per le questioni collegate alla probabilità era viva già intorno al 1300:

> “Quando si parte il giuoco della zara
> Colui che perde si riman dolente
> Repetendo le volte, e tristo impara”
> (*Purgatorio*, VI, 1-3)

Il termine *zara* deriva dall’arabo *az-zahr* (dado, da cui il francese *hasard*: Dante, 1985, p. 488) ed è riferito ad un gioco assai popolare al tempo di Dante; esso consisteva nel lanciare tre dadi e nel tentare di indovinare il punteggio complessivo (da 3 a 18) così ottenuto. Un simile gioco non può non richiamare al lettore moderno i classici problemi probabilistici: ad esempio, è immediato rendersi conto che i punteggi:

$$3 = 1+1+1 \qquad \text{e} \qquad 18 = 6+6+6$$

rappresentano gli esiti meno probabili, in quanto possono essere ottenuti soltanto con *una* combinazione; mentre altri punteggi, come 9, 10, 11, 12, ... devono essere considerati ben più probabili, potendo essere originati da più combinazioni diverse (ad esempio: $9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = ...$).

Un diretto e consapevole interessamento di Dante a questioni di probabilità appare assai dubbio (si può parlare al più di “un’analisi probabilistica ingenua”: D’Amore,

---

organizzazione delle operazioni formali (12-14 anni): ciò richiede però una chiara conoscenza del sostrato intuitivo sopra ricordato.

1994, p. 53): uno studio sistematico dei problemi di probabilità, come abbiamo precedentemente rilevato, è infatti molto più tardo.

Tuttavia al gioco della zara può essere collegata un'interessante pagina galileiana (*Opere*, XIV, citata in: Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, pp. 344-347), nella quale il sommo scienziato rispose ad un quesito posto (intorno al 1630) da alcuni "gentiluomini fiorentini", i quali avevano osservato che nel gioco della zara gli esiti 10 e 11 erano più frequenti rispetto a 9 e 12.

Tale constatazione può apparire immotivata, se si considera che le "combinazioni" di tre numeri interi positivi non maggiori di 6 aventi per somma 9, 10, 11 o 12 sono sempre sei:

9	=	1+2+6	1+3+5	1+4+4
		2+2+5	2+3+4	3+3+3
10	=	1+3+6	1+4+5	2+2+6
		2+3+5	2+4+4	3+3+4
11	=	1+4+6	1+5+5	2+3+6
		2+4+5	3+3+5	3+4+4
12	=	1+5+6	2+4+6	2+5+5
		3+3+6	3+4+5	4+4+4

Sulla base di tale osservazione, i gentiluomini fiorentini non erano in grado di giustificare razionalmente la maggiore frequenza (constatata sulla base dell'esperienza) degli esiti 10 ed 11 rispetto agli esiti 9 e 12 nel lancio di tre dadi.

5.2.4. Dalla risposta di Galileo ai *Principi generali* di Laplace

Come vedremo, nella propria chiarissima "risposta", Galileo sembra idealmente basarsi su di un testo di Laplace (che sarà scritto oltre 170 anni dopo la morte del sommo scienziato pisano e che riporteremo nel prossimo paragrafo). Egli osserva innanzitutto che con il lancio di tre dadi le possibili "scoperte" sono $6^3 = 216$, "tutte tra loro differenti" (ed equiprobabili); evidentemente ("perché i punti dei tiri di tre dadi non sono se non 16, cioè 3, 4, 5 fino a 18") ciascun punteggio totale può essere ottenuto con più esiti.

Le constatazioni fondamentali sono le seguenti:

- "Quel punto dei tre dadi la cui composizione risulta da tre numeri eguali, non si può produrre se non da una sola scoperta, ovvero tiro di dadi".

[Ad esempio, indichiamo i tre dadi con le lettere A, B, C; l'esito 3+3+3 corrisponde soltanto al lancio:

A = 3; B = 3; C = 3].

- "Il punto che si compone da tre numeri, due de' quali sieno i medesimi e il terzo diverso si può produrre da tre scoperte".

[Ad esempio, l'esito 2+2+5 corrisponde ai lanci:

A = 2; B = 2; C = 5;
A = 2; B = 5; C = 2;
A = 5; B = 2; C = 2].

- "Quel numero di punti che si compone di tre numeri differenti, può comporsi in sei maniere".

[Ad esempio, l'esito 2+3+4 corrisponde ai lanci:

A = 2; B = 3; C = 4;
A = 2; B = 4; C = 3;
A = 3; B = 2; C = 4;
A = 3; B = 4; C = 2;
A = 4; B = 2; C = 3;
A = 4; B = 3; C = 2].

Dunque Galileo osserva che le possibilità ricordate dai gentiluomini fiorentini (sei per ciascuno dei punteggi 9, 10, 11, 12) *non* sono equiprobabili.

Considerando, in termini moderni, $(1/6)^3 = 1/216$ la probabilità di ciascuna "scoperta", è quindi possibile affermare che:

- agli esiti costituiti da "tre numeri eguali" attribuiamo probabilità: 1/216;
- agli esiti costituiti "da tre numeri, due de' quali s ieno i medesimi e il terzo diverso" attribuiamo probabilità: 3/216;
- agli esiti costituiti da "tre numeri differenti", infine, attribuiamo probabilità: 6/216.

Pertanto le probabilità degli esiti in esame sono:

- 9 probabilità (6/216)+(6/216)+ +(3/216)+(3/216)+(6/216)+(1/216) = 25/216
- 10 probabilità (6/216)+(6/216)+ +(3/216)+(6/216)+(3/216)+(3/216) = 27/216
- 11 probabilità (6/216)+(3/216)+ +(6/216)+(6/216)+(3/216)+(3/216) = 27/216
- 12 probabilità (6/216)+(6/216)+ +(3/216)+(3/216)+(6/216)+(1/216) = 25/216

È così confermato che gli esiti 10 e 11 sono più frequenti rispetto a 9 e 12.

5.2.5. La Probabilità secondo Laplace

La risposta galileiana ai gentiluomini fiorentini potrebbe essere basata sui *Principî generali del calcolo delle probabilità* enunciati da P.S. de Laplace nel proprio *Essay philosophique sur les probabilités* (1814; li riprenderemo da: Laplace, 1987, pp. 29-34), che riportiamo negli enunciati originali:

"*Principi generali del Calcolo delle Probabilità*.

1° principio. Il primo di questi principi è la definizione stessa di probabilità, che... è il rapporto del numero dei casi favorevoli e quello di tutti i casi possibili.

2° principio. Ma ciò presuppone che i diversi casi siano ugualmente possibili. Se non lo sono, si dovranno determinare prima le loro rispettive possibilità, la cui corretta valutazione è uno dei punti più delicati della teoria dei casi...

3° principio. ... Se gli eventi sono indipendenti gli uni dagli altri, la probabilità di esistenza del loro insieme è il prodotto delle loro particolari probabilità...

4° principio. Quando due eventi dipendono l'uno dall'altro, la probabilità dell'evento composto è il prodotto della probabilità del primo evento per la probabilità che, verificatosi questo, si verifichi il secondo...

5° principio. Se si calcola *a priori* la probabilità dell'evento accaduto e la probabilità di un evento composto da questo e da un altro che si aspetta, la seconda probabilità, divisa per la prima, sarà la probabilità dell'evento atteso, desunta dall'evento osservato.

6° principio. Ciascuna delle cause alle quali un evento osservato può essere attribuito è indicata con tanto maggiore verosimiglianza quanto più è probabile che, supposta l'esistenza di tale causa, l'evento abbia luogo.

7° principio. La probabilità di un evento futuro è la somma dei prodotti della probabilità di ciascuna causa, dedotta dall'evento osservato, per la probabilità che, tale causa esistendo, l'evento abbia luogo" (Laplace, 1987, pp. 29-34).

Non è difficile riconoscere in tali principî alcuni enunciati classici che sono entrati nella pratica (e nella didattica) della probabilità: la nozione di probabilità che emerge dai principî ora ricordati è frequentemente citata ed utilizzata, anche ai giorni nostri, per la sua chiarezza e la sua semplicità.

Modernamente, tuttavia, dobbiamo osservare che essa non risolve il problema di una esauriente e rigorosa definizione della probabilità: è infatti evidente che affermare (come Laplace fa nel 2° principio) che i casi considerati (ad esempio i possibili risultati di un esperimento) devono risultare tutti *ugualmente possibili* non può essere accettato in una "definizione" di probabilità[10].

Ricordiamo che una moderna definizione di probabilità sarà messa a punto per via assiomatica nel 1933 da uno dei più significativi matematici del XX secolo, Andrei Nicolaievic Kolmogorov (1903-1987)[11].

Bibliografia del capitolo 5

Anglin, W.S. (1994), *Mathematics. A Concise History and Philosophy*, Springer Verlag, Berlin.

Armellini, G. (1933), Laplace: *Enciclopedia Italiana*, XX, 529, Roma.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T. (1997), *Elementi di storia della Logica formale*, Pitagora, Bologna.

[10] Si finirebbe così per affermare che tutti i casi considerati devono avere la stessa *probabilità* di manifestarsi, ma in tale modo la definizione di un concetto verrebbe a riferirsi al concetto stesso.

[11] Tra il XIX ed il XX secolo, ai russi Pafnuti Tchebycheff (1821-1894), Andrei Andreievic Markov (1856-1922) e Andrei Nicolaievic Kolmogorov sono da ascrivere contributi innovativi alla teoria della probabilità. All'inizio del XX secolo ricordiamo le opere di Emile Borel (1871-1956), che pubblicò *Eléments de la théorie des probabilités* (1909) e di Richard von Mises (1883-1953), al quale è dovuta la definizione frequentista della probabilità (Daboni, 1980). La ricerca nel campo della probabilità vide tra i principali protagonisti degli ultimi decenni anche Bruno de Finetti (1906-1985) e Laurent Schwartz (nato nel 1915): a de Finetti è dovuta la definizione soggettivistica della probabilità (in: *Teoria della probabilità* del 1970: si veda: de Finetti, 1995).

Barbieri, F. & Pepe, L. (a cura di) (1992), Bibliografia italiana di storia delle matematiche 1961-1990, *Bollettino di storia delle matematiche*, XII, 1.

Bochenski, J.M. (1972), *La logica formale. I. Dai Presocratici a Leibniz. II. La logica matematica*, Einaudi, Torino.

Allegoria della Trigonometria, da *Trigonometria plana, et sphaerica, linearis, & logarithmica* di Cavalieri (1643)

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).

Carfield, J. & Ahlgeen, A. (1988), Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implication for research, *Journal of Research in Mathematics Education* 19, 44-63.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1975), *Dal numero alla struttura*, Zanichelli, Bologna.

D'Amore, B. (1994), La matematica nella Divina Commedia, *Alma Mater Studiorum*, VIII, 1, 49-86.

Daboni, L. (1980), *Calcolo delle probabilità*, UTET, Torino.

Dante (1985), *La Divina Commedia*, a cura di C. Dragone, E. P., Roma.

Daston, L.J. (1980), Probabilistic expectation and rationality in classical Probability Theory, *Historia Mathematica*, 7, 234-260.

Dauben, J.W. & Scriba, C.J. (2002), *Writing the History of Mathematics. Its Historical Development*, Birkhäuser, Basel.

De Finetti, B. (1995), *Filosofia della probabilità*, Il Saggiatore, Milano.

Dieudonné, J. (1989), *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano (*Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, Paris 1987).

Enriques F. & de Santillana, G. (1936), *Compendio di storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1973).

Enriques F. (1938), *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1982).

Fischbein, E. & Gazit, A. (1984), Does teaching of probability improve probabilistic intuitions?, *Educational Studies in Mathematics* 15, 1-24.

Fischbein, E. (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, D. Reidel Publishing Company, Holland, USA.

Gagatsis, A.; Anastasiadou, S. & Bora-Senta, E. (1998), Errori commessi da studenti greci di Matematica in questioni di probabilità, preprint.

Gagatsis, A. (1992), Concept and methods of Didactics of Mathematics. Relations between History and Didactics of Mathematics, Gagatsis, A., *Topics of Didactics of Mathematics*, Erasmus 91.0027, Thessaloniki, 11-21, 145-170.

Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.

Hacking, I. (1975), *The emergence of Probability*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kahmeman, D. & Tversky, A. (1972), Subjective probability. A judgment of representetiveness, *Cognitive pychology* 3, 430-453.

Kahmeman, D. & Tversky, A. (1973) On the Psychology of prediction, *Psychological Review* 80, 237-251.

Kline, M. (1982), *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano (*Mathematics in western culture*, Oxford University Press, New York 1953).

Kline, M. (1985), *Matematica: la perdita della certezza*, Mondadori, Milano (*Mathematics: the loss of certainity*, Oxford University Press, New York 1980).

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York 1972).

Kolmogorov, A.N. & Fomin S.V. (1980), *Elementi di teoria delle funzioni e di Analisi funzionale*, Editori Riuniti, Roma.

Kolmogorov, A.N. & Yushkevich, A.P. (1992), *Mathematics in the 19th Century*, Birkhäuser, Basel.

Lakoma, E. (1998a), On the interactive nature of probability learning, *Proceedings of CIEAEM-49*, Setubal, July 1997, preprint.

Lakoma, E. (1998b), On the historical phenomenology of probabilistic concepts - from the didactical point of view, *Proceedings of Université d'Été*, Nantes, 1997, preprint.

Laplace, P.S. (1987), *Saggio filosofico sulle probabilità*, Theoria, Roma.

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Maistrov, I.E. (1974), *Probability Theory, A Historical Sketch*, Academic Press, New York.

Ore, O. (1960), Pascal and the intuition of Probability Theory, *American Mathematical Monthly*, 67, 409-419.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975), *The origin of the idea of chance in children*, W.W. Norton and company Inc., N.Y.

Raymond, P. (1979), *La storia e le scienze*, Editori Riuniti, Roma.

Rudin, W. (1975), *Analisi reale e complessa*, Boringhieri, Torino.

Shepherdson, J.C. (1956), On the interpretation of Aristotelian syllogistic, *Journal of Symbolic Logic*, 2, 137-147.

Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).
Todhunter, I. (1965), *A history of the mathematical Theory of Probability*, Chelsea Publishing Company (prima edizione: Cambridge, 1865).

Testi originali riferiti al capitolo 5

Cavalieri, B. (1643), *Trigonometria plana, et sphaerica, linearis, & logarithmica*, Benatij, Bologna.
Euler, L. (1787), *Lettere ad una principessa d'Alemagna sopra diversi soggetti di fisica e di filosofia*, Ferres, Napoli (prima edizione italiana; seconda edizione dopo quella originale in francese del 1772).
Laplace, P.S. (1813), *Exposition du Système du monde*, Courcier, Paris.
Laplace, P.S. (1820), *Theorie Analytique des Probabilités*, Courcier, Paris.
Montucla, J.E. (1758), *Histoire des mathematiques*, I-II, Jombert, Paris.

Syllogismos.it
History and Epistemology for Mathematics Education
(Giorgio T. Bagni, Editor)